





ÜBER DIE

DIFFERENTIALFORMELN

FÜR

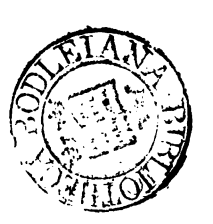
COMETENBAHNEN

VON GROSSER EXCENTRICITÄT

MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER PLANETARISCHEN STÖRUNGEN.

VON

G. D. E. WEYER.



BERLIN.
FERD. DÜMMLER'S VERLAGSBUCHHANDLUNG.

1852.

VORREDE.

Der Gegenstand dieser Habilitationsschrift betrifft einen von denjenigen Theilen der Astronomie, deren Theorie man in den Lehrbüchern wohl in allgemeinen Umrissen, nicht aber mit der Ausführlichkeit behandelt findet, die der Anwendung zu einer wirklichen Berechnung vorhergehen mufs. Man wird sich also in diesem Falle die Formeln selbst entwickeln müssen, und in den verschiedenen Abhandlungen wo ähnliche Rechnungen durchgeführt sind, wenigstens die Resultate vergleichen können, indem die Formeln, wonach gerechnet wurde, sich dabei zuweilen angeführt finden oder auf andere Abhandlungen verwiesen wird, wo die Formeln anzutreffen sind. Dafs dies überall ein leicht zugänglicher Weg sei, kann wohl nicht behauptet werden, vielmehr mufs es oft wünschenswerth erscheinen, die nöthigen Formeln nicht blofs in einer Sammlung sondern auch ihrer Ableitung nach, übersichtlich beisammen zu haben. Das ist es, was ich hier zu geben versucht habe in Betreff der Differentialformeln zur nähern Bestimmung einer Bahn von grofser Excentricität, welches der gewöhnliche Fall bei den Cometen ist. In den meisten Fällen hat man zwar keine Veranlassung gehabt, bei der Bestimmung der Cometenbahnen so weit zu gehen, da sich

Gedruckt bei A. W. Schade in Berlin, Grünstr. 18.

VORREDE.

Der Gegenstand dieser Habilitationsschrift betrifft einen von denjenigen Theilen der Astronomie, deren Theorie man in den Lehrbüchern wohl in allgemeinen Umrissen, nicht aber mit der Ausführlichkeit behandelt findet, die der Anwendung zu einer wirklichen Berechnung vorhergehen muſs. Man wird sich also in diesem Falle die Formeln selbst entwickeln müssen, und in den verschiedenen Abhandlungen wo ähnliche Rechnungen durchgeführt sind, wenigstens die Resultate vergleichen können, indem die Formeln, wonach gerechnet wurde, sich dabei zuweilen angeführt finden oder auf andere Abhandlungen verwiesen wird, wo die Formeln anzutreffen sind. Daſs dies überall ein leicht zugänglicher Weg sei, kann wohl nicht behauptet werden, vielmehr muſs es oft wünschenswerth erscheinen, die nöthigen Formeln nicht bloſs in einer Sammlung sondern auch ihrer Ableitung nach, übersichtlich beisammen zu haben. Das ist es, was ich hier zu geben versucht habe in Betreff der Differentialformeln zur nähern Bestimmung einer Bahn von groſser Excentricität, welches der gewöhnliche Fall bei den Cometen ist. In den meisten Fällen hat man zwar keine Veranlassung gehabt, bei der Bestimmung der Cometenbahnen so weit zu gehen, da sich

in der Regel die Beobachtungen wegen der kurzen Zeit der Sichtbarkeit schon durch eine auf wenige Normalörter gegründete Rechnung, sämmtlich befriedigend darstellen lassen. Je gröſser aber der Zeitraum wird, den die Beobachtungen umfassen, desto schwerer wird es, denselben in der Gesammtheit zu genügen. Man ist denn zur Bildung von Bedingungsgleichungen übergegangen und hat sie nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst, wenn man den Gegenstand erschöpfend behandeln wollte, nachdem man, um nichts unberücksichtigt zu lassen, auch die Störungen in Betracht gezogen hatte, welche der Comet durch die Anziehung der Planeten erleiden muſste. So groſse Arbeiten wurden unternommen, um die Bahn aufs Beste zu bestimmen und demnach die Theorie strenge mit den Beobachtungen vergleichen zu können, auch wenn keine entschiedene Ausnahme von dem gewöhnlichen Falle einer fast parabolischen Bahn sich darzubieten versprach. In neuerer Zeit veranlaſsten die mehrfachen Entdeckungen der kleinen Planeten und der Cometen von kurzer Umlaufszeit, Arbeiten von gröſserem Interesse, weil sie dem gegenwärtigen Bedürfnisse der Wissenschaft angemessener sind, als die Untersuchungen über Cometenbahnen mit Umlaufszeiten von Jahrtausenden. Wenn also kein Zweifel darüber sein kann, welche Arbeiten in dieser Beziehung die wichtigeren und dringlicheren sind, so bleibt doch ein selbstständiges Interesse auch den andern, wie überhaupt in den verschiedenen Theilen der Astronomie und in jeder Wissenschaft. In diesem Betrachte dürfte auch die Wahl des Gegenstandes dieser Schrift nicht ungerechtfertigt erscheinen, deren gröſster Theil sich ebenfalls auf die elliptischen Bahnen im Allgemeinen bezieht.

Im ersten Abschnitte habe ich die Differentialformeln

abgeleitet, welche die Aenderungen der Elemente der Bahn angeben in Bezug auf die Aenderungen der geocentrischen Rectascension und Declination und dabei die Methode der rechtwinkligen Coordinaten im Raume nebst den Gaussischen Constanten angewandt*). Gaufs hatte in der *Theoria motus corp. coel.* die Differentiale der Bahnelemente in Bezug auf die geocentrische Länge und Breite gegeben, vielleicht weil man damals noch, wie auch in den Ephemeriden jener Zeit, die Lage der Gestirne mehr auf die Ekliptik, als auf den Aequator zu beziehen pflegte. Unter den häufigen Anwendungen dieser Formeln findet man auch, dafs Bessel sich derselben bediente bei der Bahnbestimmung des Cometen von 1807 (p. 71) für die Berechnung der Differentiale des Radiusvectors, des Argumentes der Breite, der Neigung und des Knotens; Bessel setzt dann (p. 72) die Formeln hinzu, welche er für die sehr excentrische Bahn des Cometen von 1807 anwandte, zur Bestimmung der Differentiale des Arguments der Breite und des Radiusvectors in Bezug auf die Zeit und Länge des Perihels, so wie in Bezug auf die kleine Gröfse, um welche die Excentricität dieser Bahn von der parabolischen Excentricität abwich. Bei der Bahnbestimmung des Olbersschen Cometen (Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften 1812—1813 giebt Bessel schon der Beziehung auf den Aequator den Vorzug und führt die Formeln im Resultate an, wie sie hier abgeleitet sind; dieselben beziehen sich aber nur auf den Knoten, die Neigung, das Argument der Breite und den Radiusvector; die übrigen werden nicht angeführt, sondern als bekannt

*) Die Einführung der Cosinusse der Constanten a, b, c habe ich bei den Transformationen sehr bequem gefunden, auch im zweiten Abschnitte dieser Schrift. Die Formeln nehmen dadurch oft eine sehr einfache Gestalt an. Diese Anwendung wird daher vermuthlich auch schon früher gemacht sein.

vorausgesetzt. Was sich sonst zur Vergleichung darbot, glaube ich am gehörigen Orte bemerkt zu haben.

Der zweite Abschnitt betrifft die Berechnung der Störungen, welche die Elemente der Cometenbahn während eines kurzen Zeitraums durch die Anziehung der Planeten erleiden, eine Rechnung die man für längere oder kürzere Zeitabschnitte wiederholen mufs und danach durch eine Summationsmethode, die sogenannte mechanische Quadratur, die Elemente für eine bestimmte Zeit erhalten kann, wenn man bis dahin die Rechnung in Intervallen fortgesetzt hat. Die im ersten Abschnitte entwickelten Differentialformeln können hierbei wieder in Anwendung kommen, wenn man die Aenderungen der Rectascension und Declination bestimmen will, welche den Aenderungen der Elemente entsprechen. — Diese Methode, welche man die Berechnung der speciellen Störungen genannt hat, wurde bisher für die kleinen Planeten und die Cometen angewandt, weil man hier nicht wie bei den andern Hauptplaneten zu hinreichend convergirenden, also brauchbaren Reihenentwickelungen gelangen konnte. Nach Hansen's „Ermittelung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung (Gotha 1843)“, gewinnt es den Anschein als wenn man in Zukunft jener Rechnungsweise der speciellen Störungen überhoben sein dürfte. Hansens Methode ist aber noch nicht vollständig bekannt gemacht; von dem genannten Werke ist bis jetzt blos der erste Theil erschienen, der sich mit dem Falle beschäftigt, wo der rad. vect. des gestörten Körpers kleiner ist als der des störenden. — In Fällen wo man wirklich die sämmtlich erforderlichen Störungsrechnungen ausgeführt hat, so weit es nöthig war, findet man bis auf die neueste Zeit noch immer die Differentialformeln aus Bessel's

Abhandlung über den Cometen von 1807 zu Grunde gelegt, wenn es eine Bahn von sehr grofser Excentricität betraf, z. B. bei dem Cometen vom Jahre 1680, berechnet von Encke; bei dem Cometen von 1811, von Argelander berechnet; bei dem Olbers'schen Cometen von Bessel, dem Cometen von 1770 von Clausen berechnet, bei einem von Tycho beobachteten Cometen, berechnet von Peters, wie auch bei verschiedenen Arbeiten über den Halleyschen Cometen. Bessel selbst bezieht sich in dieser berühmten Abhandlung über den Cometen von 1807 auf die von Lagrange in den Berliner Memoiren gegebene Ansicht der Störungen, wonach man die Elemente der Bahn als veränderlich betrachtet, so dafs statt eines Kegelschnitts, ein System von Kegelschnitten entsteht. In den *Nouveaux Mémoires de l'Acad. Année* 1781 (Berlin 1783) findet sich auch eine Abhandlung von Lagrange, worin diese Theorie bei Gelegenheit der Untersuchung über die säcularen Aenderungen der Planetenbahnen, sehr klar vorgetragen wird, nur erhält man daraus nicht sogleich die für die obige Anwendung bequemen Formeln, worauf auch die Absicht in diesem Memoire nicht speciell gerichtet war. Bessel's Abhandlung ist nun in sehr gedrängter Kürze geschrieben, der Gang der Entwickelung darin auch nicht immer so umständlich angedeutet, dafs sich die Resultate jedesmal leicht wieder finden liefsen, wenn man überall genau diesem Wege folgen wollte. Das Studium der Sache wird aber jetzt bedeutend erleichtert durch die später erschienenen Abhandlungen von Encke und Airy (Abhandlungen der Berl. Akad. f. 1834, Berl. Astr. Jahrb. f. 1837, Naut. Alm. 1837). Diese Schriften betreffen die Störungsrechnungen für die kleinen Planeten und die Cometen von kurzer Umlaufszeit. Die Bahnen mit sehr

grofser Excentricität sind dabei nicht noch besonders berücksichtigt. In neuerer Zeit ist auch von Prof. Encke in den Monatsberichten der Berl. Akad. (Aug. 1850) eine kurze Darstellung mitgetheilt worden über die Ableitung und Construction der Variation der Constanten bei Planetenstörungen. Ich habe mich ferner noch der astronomischen Vorlesungen bedienen können, welche Herr Prof. Encke in den Jahren 1844—46 an der Universität zu Berlin hielt, und endlich verdanke ich noch der Güte des Herrn Prof. Scherk die Mittheilung mehrerer astronomischen Werke, welche ich aufser denen der hiesigen Universitätsbibliothek bei meiner Arbeit benutzen konnte.

Kiel im November 1851.

G. D. E. WEYER.

Erster Abschnitt.

Entwickelung der Differentialformeln für die Aenderungen der geocentrischen Rectascension und Declination zufolge der Aenderungen der Elemente einer genähert bestimmten Bahn.

§. 1.

Es sei Δ der Abstand des Cometen von der Erde, α und δ die geocentrische Rectascension und Declination desselben; x, y, z die drei rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf den Aequator als Ebene der (x, y), wobei die positiven Axenenden beziehungsweise nach 0° Æ., 90° Æ. und 90° Decl. gerichtet sind. Der Nullpunkt dieser Coordinaten sei die Sonne, deren Coordinaten selbst aber für die Erde als Anfangspunkt und auf dieselben Ebenen bezogen mit X, Y, Z bezeichnet werden.

Man erhält dann aus einer leichten Construction die Gleichungen

$$\Delta \cos\alpha \cos\delta = x + X$$
$$\Delta \sin\alpha \cos\delta = y + Y$$
$$\Delta \sin\delta \qquad = z + Z$$

Wird der Ort der Sonne hierbei als genau genug bekannt angenommen, so hat man die Differentiale

$$dx = \cos\alpha\cos\delta . d\Delta - \Delta \sin\alpha \cos\delta . d\alpha - \Delta \cos\alpha \sin\delta . d\delta$$
$$dy = \sin\alpha\cos\delta . d\Delta + \Delta \cos\alpha \cos\delta . d\alpha - \Delta \sin\alpha \sin\delta . d\delta$$
$$dz = \sin\delta . d\Delta + \Delta \cos\delta . d\delta$$

Die erste Gleichung mit $\sin\alpha$, die zweite mit $\cos\alpha$ multiplicirt und subtrahirt so wird

$$(\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2)\Delta \cos\delta\, d\alpha = -dx \sin\alpha + dy \cos\alpha$$

Die erste Gleichung mit cos α, die zweite mit sin α multiplicirt und addirt giebt

$$dx.\cos\alpha + dy.\sin\alpha = \cos\delta.d\varDelta - \varDelta\sin\delta.d\delta$$

und es war

$$dz = \sin\delta.d\varDelta + \varDelta\cos\delta.d\delta$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit cos δ, die vorletzte mit — sin δ so ist die Summe

$$-dx.\cos\alpha\sin\delta - dy.\sin\alpha\sin\delta + dz\cos\delta = (\sin\delta^2 + \cos\delta^2)\varDelta d\delta$$

Es wird demnach

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta.d\alpha &= -\frac{\sin\alpha}{\varDelta}.dx + \frac{\cos\alpha}{\varDelta}.dy \\ d\delta &= -\frac{\cos\alpha\sin\delta}{\varDelta}.dx - \frac{\sin\alpha\sin\delta}{\varDelta}.dy + \frac{\cos\delta}{\varDelta}.dz \end{aligned}\right\} (1)$$

wobei jetzt die Werthe von dx, dy, dz als Differentiale der Elemente der Bahn zu entwickeln sind.

§. 2.

Wäre die Ekliptik als Grundebene und die Axe der x mit der Knotenlinie zusammenfallend angenommen, so würden die Werthe der Coordinaten zunächst die einfachste Form erhalten:

$$x_1 = r\cos u$$
$$y_1 = r\sin u\cos i$$
$$z_1 = r\sin u\sin i$$

wo r der Radiusvector, u das Argument der Breite und i die Neigung der Bahn ist, welche stets positiv und kleiner als 90° genommen werden wird. Verlegt man aber die Axe der x wieder auf die Linie der Frühlingsnachtgleiche und nimmt die Axe der y senkrecht darauf in der Ebene der Ekliptik, z senkrecht auf dieser Ebene so verwandeln sich die letzten Formeln in

$$x_2 = r(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i)$$
$$y_2 = r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i)$$
$$z_2 = r\sin u\sin i$$

wenn Ω die Länge des aufsteigenden Knotens bezeichnet.

§. 3.

Um die Coordinaten wieder auf den Aequator zu beziehen, dessen Neigung gegen die Ekliptik = ε sei, kann man die sehr einfachen Formeln zur Transformation der Coordinaten anwenden

$$x = x_2$$
$$y = y_2 \cos\varepsilon - z_2 \sin\varepsilon$$
$$z = z_2 \cos\varepsilon + y_2 \sin\varepsilon$$

und die Substitution ergiebt dann

$$\left.\begin{aligned}
x &= r\cos u \cos\Omega - r\sin u \sin\Omega \cos i \\
y &= r\cos u \sin\Omega \cos\varepsilon + r\sin u \cos\Omega \cos i \cos\varepsilon - r\sin u \sin i \sin\varepsilon \\
z &= r\cos u \sin\Omega \sin\varepsilon + r\sin u \cos\Omega \cos i \sin\varepsilon + r\sin u \sin i \cos\varepsilon
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die Differentiale dieser Gleichungen werden zunächst

$$dx = dr.\frac{x}{r} + du.(-r\sin u \cos\Omega - r\cos u \sin\Omega \cos i)$$
$$+ d\Omega(-r\cos u \sin\Omega - r\sin u \cos\Omega \cos i) + di.r\sin u \sin\Omega \sin i$$

$$dy = dr.\frac{y}{r} + du.(-r\sin u \sin\Omega \cos\varepsilon + r\cos u \cos\Omega \cos i \cos\varepsilon - r\cos u \sin i \sin\varepsilon)$$
$$+ d\Omega(r\cos u \cos\Omega \cos\varepsilon - r\sin u \sin\Omega \cos i \cos\varepsilon) + di.(-r\sin u \cos\Omega \sin i \cos\varepsilon$$
$$- r\sin u \cos i \sin\varepsilon)$$

$$dz = dr.\frac{z}{r} + du(-r\sin u \sin\Omega \sin\varepsilon + r\cos u \cos\Omega \cos i \sin\varepsilon + r\cos u \sin i \cos\varepsilon)$$
$$+ d\Omega(r\cos u \cos\Omega \sin\varepsilon - r\sin u \sin\Omega \cos i \sin\varepsilon) + di(-r\sin u \cos\Omega \sin i \sin\varepsilon$$
$$+ r\sin u \cos i \cos\varepsilon)$$

Dann sind für dr und du die Differentiale der Elemente einzuführen, welche sich dadurch angeben lassen. Es ist aber, wenn v die wahre Anomalie, π die Länge des Perihels bezeichnet, worunter man immer die Gröſse versteht, welche von einer Länge in der Bahn abgezogen werden muſs um die zugehörige wahre Anomalie zu erhalten, die Länge in der Bahn so verstanden, daſs sie vom Widderpunkte bis zum Knoten nach der Ordnung der Zeichen auf der Ekliptik und dann weiter auf der Bahn im Sinne der Bewegung gezählt wird, also

$u = v + \pi - \Omega$ oder $du = dv + d\pi - d\Omega$ bei rechtläufiger Bewegung
$u = v - \pi + \Omega = -v + \pi - \mho$ . . . - rückläufiger - -

Durch die Substitution von du, in diesen Werthen ausgedrückt, erhält man also durch die obigen Gleichungen für die drei Elemente π, Ω, i ihre Differentialcoefficienten in Bezug auf dx, dy, dz und es bleiben nur noch dv und dr zu entwickeln übrig, um die Differentiale der drei übrigen Elemente einzuführen, nämlich die Zeit des Perihels $= T$, den Abstand des Perihels $= q$ und die Excentricität $= e$, die letztere ausgedrückt in Theilen der halben groſsen Axe der Bahn. Dazu bieten die

Gleichungen der Kegelschnitte und die Berücksichtigung der Bewegung nach den Keplerschen Gesetzen die Mittel.

§. 4.

Zur Vereinfachung der vorhergehenden Ausdrücke hat man Hülfswinkel eingeführt. Die Gleichungen (2) haben die Form

$$\left.\begin{aligned} x &= rP\cos u + rQ\sin u \\ y &= rP'\cos u + rQ'\sin u \\ z &= rP''\cos u + rQ''\sin u \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wo also gesetzt ist

$$\left.\begin{aligned} P &= \cos\Omega & Q &= -\sin\Omega\cos i \\ P' &= \sin\Omega\cos\varepsilon & Q' &= \cos\Omega\cos i\cos\varepsilon - \sin i\sin\varepsilon \\ P'' &= \sin\Omega\sin\varepsilon & Q'' &= \cos\Omega\cos i\sin\varepsilon + \sin i\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

mithin

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dP}{d\Omega} = -\sin\Omega \qquad \frac{dQ}{d\Omega} = -\cos\Omega\cos i \qquad \frac{dQ}{di} = \sin\Omega\sin i \\ &\frac{dP'}{d\Omega} = \cos\Omega\cos\varepsilon \qquad \frac{dQ'}{d\Omega} = -\sin\Omega\cos i\cos\varepsilon \\ &\qquad \frac{dQ'}{di} = -\cos\Omega\sin i\cos\varepsilon - \cos i\sin\varepsilon \\ &\frac{dP''}{d\Omega} = \cos\Omega\sin\varepsilon \qquad \frac{dQ''}{d\Omega} = -\sin\Omega\cos i\sin\varepsilon \\ &\qquad \frac{dQ''}{di} = -\cos\Omega\sin i\sin\varepsilon + \cos i\cos\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und es wird

$$\left.\begin{aligned} dx &= dr.\frac{x}{r} + du.(-rP\sin u + rQ\cos u) + dP.r\cos u + dQ.r\sin u \\ dy &= dr.\frac{y}{r} + du.(-rP'\sin u + rQ'\cos u) + dP'.r\cos u + dQ'.r\sin u \\ dz &= dr.\frac{z}{r} + du.(-rP''\sin u + rQ''\cos u) + dP''.r\cos u + dQ''.r\sin u \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Schreibt man die Gleichungen (3) nach der von Gaufs eingeführten Umformung

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin a\sin(A+u) \\ y &= r\sin b\sin(B+u) \\ z &= r\sin c\sin(C+u) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

oder zur Vergleichung mit (3) und (4) entwickelt:

$$\begin{aligned} x &= r\sin a\sin A\cos u + r\sin a\cos A\sin u \\ y &= r\sin b\sin B\cos u + r\sin b\cos B\sin u \\ z &= r\sin c\sin C\cos u + r\sin c\cos C\sin u \end{aligned}$$

so ist also gesetzt

$$(8)\left\{\begin{array}{ll} P=\cos\Omega=\sin a\sin A & Q=-\sin\Omega\cos i=\sin a\cos A \\ P'=\sin\Omega\cos\varepsilon=\sin b\sin B & Q'=\cos\Omega\cos i\cos\varepsilon-\sin i\sin\varepsilon=\sin b\cos B \\ P''=\sin\Omega\sin\varepsilon=\sin c\sin C & Q''=\cos\Omega\cos i\sin\varepsilon+\sin i\cos\varepsilon=\sin c\cos C \end{array}\right.$$

Diese Gleichsetzungen der Produkte von Brüchen sind immer möglich, und auch für $\cos\Omega\cos i\cos\varepsilon-\sin i\sin\varepsilon$ wird der gröfste Werth für $\Omega=180^0$ nur $-\cos i\cos\varepsilon-\sin i\sin\varepsilon=-\cos(i-\varepsilon)$ $=$ einem Bruche. Ebenso ist Q'' stets ein Bruch, wie auch in (5) $\frac{dQ'}{di}$ und $\frac{dQ''}{di}$. Man kann damit die Ausdrücke für Q' und Q'' einfacher erhalten, indem man sie einem sin und cos proportional setzt:

$$\cos\Omega\cos i\cos\varepsilon-\sin i\sin\varepsilon=m\cos(E+\varepsilon)=m\cos E\cos\varepsilon-m\sin E\sin\varepsilon$$

$$\cos\Omega\cos i\sin\varepsilon+\sin i\cos\varepsilon=n\sin(E+\varepsilon)=n\sin E\cos\varepsilon+n\cos E\sin\varepsilon$$

also $\begin{array}{l}\cos\Omega\cos i=m\cos E\\ \sin i=m\sin E\end{array}$ und $\begin{array}{l}\cos\Omega\cos i=n\cos E\\ \sin i=n\sin E\end{array}$

folglich $n=m$, so dafs man mit einem Hülfswinkel E ausreichen wird;

$$\operatorname{tg}E=\frac{\operatorname{tg}i}{\cos\Omega},\quad m=n=\frac{\cos\Omega\cos i}{\cos E}$$

$$Q'=\sin b\cos B=\frac{\cos\Omega\cos i}{\cos E}.\cos(E+\varepsilon)$$

$$Q''=\sin c\cos C=\frac{\cos\Omega\cos i}{\cos E}.\sin(E+\varepsilon)$$

Man hat also zur Berechnung der constanten Hülfswinkel die Formeln

$$(9)\left\{\begin{array}{l} \operatorname{Cotg}A=-\operatorname{tg}\Omega\cos i\quad \operatorname{tg}E=\frac{\operatorname{tg}i}{\cos\Omega} \\ \operatorname{Cotg}B=\frac{\cos i}{\operatorname{tg}\Omega\cos E}.\frac{\cos(E+\varepsilon)}{\cos\varepsilon} \\ \operatorname{Cotg}C=\frac{\cos i}{\operatorname{tg}\Omega\cos E}.\frac{\sin(E+\varepsilon)}{\sin\varepsilon} \\ \sin a=\frac{\cos\Omega}{\sin A}=-\frac{\sin\Omega\cos i}{\cos A} \\ \sin b=\frac{\sin\Omega\cos\varepsilon}{\sin B}=\frac{\cos\Omega\cos i\cos\varepsilon-\sin i\sin\varepsilon}{\cos B} \\ \sin c=\frac{\sin\Omega\sin\varepsilon}{\sin C}=\frac{\cos\Omega\cos i\sin\varepsilon+\sin i\cos\varepsilon}{\cos C} \end{array}\right.$$

Um noch eine Prüfungsgleichung zu haben kann man aus den Hülfsgleichungen (8) die Produkte $\sin C\cos B$ und $\cos C\sin B$

bilden, so wird $\sin(C-B) = -\frac{\sin i \sin \Omega}{\sin b \sin c}$. Vergleicht man damit $\sin a \cos A = -\sin \Omega \cos i$ so wird für die Controlle

(10) . . $\operatorname{tg} i = \frac{\sin b \sin c \sin(C-B)}{\sin a \cos A}$ und man kann nach dem folden § noch hinzufügen $= -\frac{\cos a}{\sin a \cos A} = -\frac{\operatorname{cotg} a}{\cos A}$.

Wäre die Bewegung rückläufig so brauchte man bei der Berechnung dieser Constanten nur ☋ statt ☊ zu nehmen, und die Anomalie u nachher negativ zu setzen (s. §. 3.).

§. 5.

Man kann diese Constanten immer so bestimmen, daſs $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ stets positiv sind, so daſs also noch (9) $\cos \Omega$ und $\sin A$ dasselbe Zeichen haben, ebenso $\sin \Omega$ und $\sin B$, $\sin \Omega$ und $\sin C$; dann werden nach dem Werthe von Q in (8) $\sin \Omega$ und $\cos A$ entgegengesetzte Zeichen haben. Der Werth von Q' wird für $\Omega = o$ sich in $\cos(i+\varepsilon)$ verwandeln, welches negativ werden kann bei einer groſsen Neigung; damit würde aber auch $\operatorname{tg} E = \operatorname{tg} i$ und nach (8) $\operatorname{Cotg} B = -\infty$; $\sin B$, dasselbe Zeichen wie $\sin \Omega$ behaltend, würde $= o$, also $B = 180^\circ$, $\cos B = -1$, so daſs $\sin b$ positiv bleibt. In demselben Falle würde $Q'' = \sin(i+\varepsilon)$ welches nicht negativ werden kann, wenn man i stets positiv und kleiner als 90° nimmt; dann ist $\cos C = 1$ und $\sin c$ bleibt positiv. Eben so geben die übrigen möglichen Fälle, daſs $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ immer positiv zu nehmen sind. z. B. für $\Omega = 180^\circ$ erhält Q' einen negativen Werth; denn ist $\cos \Omega = -1$, $\operatorname{tg} E = -\operatorname{tg} i$; nimmt man also $E = 180 - i$, so ist $\cos(E+\varepsilon)$ negativ, $\operatorname{tg} \Omega$ ist $= o$, $\operatorname{cotg} B = -\infty$, $B = 180^\circ$, $\sin b \cos B = -\sin b = -\cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon = -\cos(i-\varepsilon)$, also wieder $\sin b$ positiv.

Die Formeln (9) geben die Constanten für den Aequator und man hat darin nur die Schiefe der Ekliptik oder $\varepsilon = o$ zu setzen, wenn man sie für die Ekliptik haben will, so daſs ihre Substitution in die Formeln (7) die Coordinaten für die Ekliptik als Grundebene der (x, y) giebt.

Zur Entwickelung von allgemeinen Relationen unter den Con-

stanten a, b, c, A, B, C zu einander kann man zuerst die Quadrate der Gleichungen (7)

$$x = r \sin a \sin(A+u)$$
$$y = r \sin b \sin(B+u)$$
$$z = r \sin c \sin(C+u)$$

addiren und da $x^2+y^2+z^2=r^2$ ist, so ergiebt sich

$$1 = \sin a^2 \sin(A+u)^2 + \sin b^2 \sin(B+u)^2 + \sin c^2 \sin(C+u)^2 \quad \ldots \quad (11)$$

wo u die einzige Variabele, also ein beliebiger Winkel ist. Setzt man $u=o$, so wird

$$1 = \sin a^2 \sin A^2 + \sin b^2 \sin B^2 + \sin c^2 \sin C^2 \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

Wenn man -90^0 statt u setzt, so folgt

$$1 = \sin a^2 \cos A^2 + \sin b^2 \cos B^2 + \sin c^2 \cos C^2 \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

und wenn $u-90^0$ für u in (11) gesetzt wird,

$$1 = \sin a^2 \cos(A+u)^2 + \sin b^2 \cos(B+u)^2 + \sin c^2 \cos(C+u)^2 \quad \ldots \quad (14)$$

Die Summa der Gleichungen (12) und (13) ist

$$2 = \sin a^2 + \sin b^2 + \sin c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

daher auch

$$1 = \cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

oder die bekannte Relation zwischen den Cosinussen der drei Winkel, welche eine beliebige Richtung mit den drei rechtwinkligen Coordinatenaxen im Raume bildet.

Aus den Gleichungen (8) erhält man durch Quadrirung

$$\sin a^2 \sin A^2 + \sin a^2 \cos A^2 = \cos \Omega^2 + \sin \Omega^2 \cos i^2$$
$$\sin a^2 = 1 - \sin \Omega^2 \sin i^2$$
$$\cos a^2 = \sin \Omega^2 \sin i^2, \quad \cos a = \pm \sin \Omega \sin i$$

$\cos a$ kann aber nicht $= - \sin \Omega \sin i$ sein, denn das gäbe für $\Omega = 90^0$, $\cos a = -\sin i$ und nach den Formeln (8) und (9) ist für $\Omega = 90$, $\operatorname{cotg} A = -\infty$, $\sin A = o$, $\cos A = -1$, $\sin a = \cos i$, $\cos a = \sin i$ statt $-i$; daher $\cos a = \sin \Omega \sin i$.

Ferner erhält man aus (8)

$$\sin b^2 \sin B^2 + \sin b^2 \cos B^2 = \sin \Omega^2 \cos \varepsilon^2 + (\cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon)^2$$
$$\sin b^2 = \sin \Omega^2 \cos \varepsilon^2 + \cos \Omega^2 \cos i^2 \cos \varepsilon^2 - 2 \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon \sin i \sin \varepsilon + \sin i^2 \sin \varepsilon^2$$
$$= \sin \Omega^2 \cos \varepsilon^2 + \cos \Omega^2 \cos \varepsilon^2 - \cos \Omega^2 \sin i^2 \cos \varepsilon^2 - 2 \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon \sin i \sin \varepsilon$$
$$+ \sin \varepsilon^2 - \cos i^2 \sin \varepsilon^2$$
$$= 1 - \cos \Omega^2 \sin i^2 \cos \varepsilon^2 - 2 \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon \sin i \sin \varepsilon - \cos i^2 \sin \varepsilon^2$$
$$\cos b^2 = \cos \Omega^2 \sin i^2 \cos \varepsilon^2 + 2 \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon \sin i \sin \varepsilon + \cos i^2 \sin \varepsilon^2$$
$$\cos b = \pm (\cos \Omega \sin i \cos \varepsilon + \cos i \sin \varepsilon)$$

wo das obere Zeichen hier verworfen werden mufs, da für $\Omega = o$ daraus folgen würde $\cos b = \sin(i + \varepsilon)$ während für denselben Fall

nach den Formeln (8) und (9) $\operatorname{tg} E = \operatorname{tg} i$, $E = i$, $\operatorname{cotg} B = \pm \infty$, jenachdem $\varepsilon + i \lessgtr 90^0$; $\sin B = o$, $\cos B = \pm 1$, $\sin b = \pm \cos(i + \varepsilon)$, wo das untere Zeichen für $i + \varepsilon > 90^0$ gilt, so daſs $\sin b$ immer positiv bleibt, welches dann mit $\cos b = -\sin(i + \varepsilon)$ übereinstimmt, nicht mit $\cos b = \sin(i + \varepsilon)$, da die Neigung stets positiv und kleiner als 90^0 genommen wurde. Man erhält also $\cos b = -\cos \Omega \sin i \cos \varepsilon - \cos i \sin \varepsilon$.

Endlich folgt noch aus (8)

$$\sin c^2 \sin C^2 + \sin^2 \cos C^2 = \sin \Omega^2 \sin \varepsilon^2 + (\cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon)^2$$

$$\sin c^2 = \sin \Omega^2 \sin \varepsilon^2 + \cos \Omega^2 \cos i^2 \sin \varepsilon^2 + 2 \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon \sin i \cos \varepsilon + \sin i^2 \cos \varepsilon^2$$

$$= \sin \varepsilon^2 - \cos \Omega^2 \sin i^2 \sin \varepsilon^2 + 2 \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon \sin i \cos \varepsilon + \cos \varepsilon^2 - \cos i^2 \cos \varepsilon^2$$

$$\sin c^2 = 1 - \cos \Omega^2 \sin i^2 \sin \varepsilon^2 + 2 \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon \sin i \cos \varepsilon - \cos i^2 \cos \varepsilon^2$$

$$\cos c^2 = \cos \Omega^2 \sin i^2 \sin \varepsilon^2 - 2 \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon \sin i \cos \varepsilon + \cos i^2 \cos \varepsilon^2$$

$$\cos c = \pm (\cos \Omega \sin i \sin \varepsilon - \cos i \cos \varepsilon).$$

Das obere Zeichen giebt für $\Omega = o$, $\cos c = -\cos(i + \varepsilon)$ und die Formeln (9) geben für diesen Fall $\operatorname{cotg} C = \infty$, $C = o$, $\cos C = 1$, $\sin c = \sin(i + \varepsilon)$, $\cos c = \cos(i + \varepsilon)$; es muſs also das untere Zeichen genommen werden, demnach $\cos c = -\cos \Omega \sin i \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon$.

Die Formeln werden also

$$(17) \begin{cases} \cos a = \sin \Omega \sin i \\ \cos b = -\cos \Omega \sin i \cos \varepsilon - \cos i \sin \varepsilon \\ \cos c = -\cos \Omega \sin i \sin \varepsilon + \cos i \cos \varepsilon \end{cases}$$

Die Gleichungen (8) geben noch durch kreuzweise Multiplication

$$\sin a \sin b \sin A \cos B = \cos \Omega^2 \cos i \cos \varepsilon - \cos \Omega \sin i \sin \varepsilon$$
$$\sin a \sin b \cos A \sin B = -\sin \Omega^2 \cos i \cos \varepsilon$$

daher

$$\sin a \sin b \sin(A - B) = \cos i \cos \varepsilon - \cos \Omega \sin i \sin \varepsilon = \cos c$$

Ferner

$$\sin a \sin c \sin A \cos C = \cos \Omega^2 \cos i \sin \varepsilon + \cos \Omega \sin i \cos \varepsilon$$
$$\sin a \sin c \cos A \sin C = -\sin \Omega^2 \cos i \sin \varepsilon$$

woraus

$$\sin a \sin c \sin(A - C) = \cos i \sin \varepsilon + \cos \Omega \sin i \cos \varepsilon = -\cos b$$

Endlich

$$\sin b \sin c \sin B \cos C = \sin \Omega \cos \varepsilon \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin \Omega \cos \varepsilon^2 \sin i$$
$$\sin b \sin c \cos B \sin C = \sin \Omega \sin \varepsilon \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin \Omega \sin \varepsilon^2 \sin i$$

also

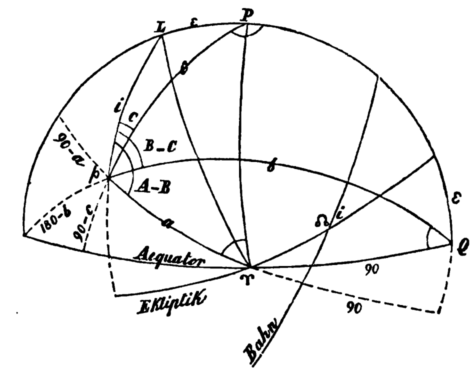
$$\sin b \sin c \sin(B - C) = \sin \Omega \sin i = \cos a$$

$$(18) \begin{cases} \cos a = \sin b \sin c \sin(B - C) \\ \cos b = -\sin a \sin c \sin(A - C) \\ \cos c = \sin a \sin b \sin(A - B) \end{cases}$$

Dieselben Resultate erhält man aus der geometrischen Bedeutung der Constanten, wonach zufolge der Formeln (8) und (9), a, b, c die Abstände des nördlichen Pols der Bahn von den positiven Enden der Coordinatenaxen sind, folglich $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ stets positiv bleiben; ferner sind A, B, C die Winkel am Pole der Bahn zwischen dem gröſsten Kreise, welcher von dort aus durch den Pol der Ekliptik gezogen ist, und den gröſsten Kreisen, welche vom Pole der Bahn durch die positiven Axenenden der Coordinaten gehen.

Bei dieser Construction geben die Dreiecke, deren eine Seite ein Quadrant ist, in Verbindung mit den übrigen

$$1 : \sin(A - B) = \sin a : \sin Q$$
$$\sin Q \sin b = \cos c$$
$$\cos c = \sin a \sin b \sin(A - B)$$
$$1 : \sin(B - C) = \sin b : \sin P$$
$$\sin P \sin c = \cos a$$
$$\cos a = \sin b \sin c \sin(B - C)$$
$$1 : \sin(A - C) = \sin c : \sin \Upsilon$$
$$\sin \Upsilon \sin a = \sin(b - 90)$$
$$\cos b = -\sin a \sin c \sin(A - C),$$



wie vorhin. Die Winkel, welche den Seiten a, b, c gegenüberliegen, sind mit Q, P, Υ bezeichnet. Ferner erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken noch

$$(19) \begin{cases} \cos(A - B) = -\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b \\ \cos(B - C) = -\operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} c \\ \cos(A - C) = -\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} c \end{cases}$$

§. 6.

Die letzten der Formeln (5) verwandeln sich durch die Ausdrücke (17) in

$$\frac{dQ}{di}=\cos a,\quad \frac{dQ'}{di}=\cos b,\quad \frac{dQ''}{di}=\cos c$$

Substituirt man in (6) die Werthe für P und Q aus (8) so wird

$$\begin{aligned}r(Q\cos u-P\sin u)&=r(\sin a\cos A\cos u-\sin a\sin A\sin u)\\&=r\sin a\cos(A+u)=r\sin a\operatorname{cotg}(A+u)\sin(A+u)\\&=x\operatorname{cotg}(A+u)\\r(Q'\cos u-P'\sin u)&=y\operatorname{cotg}(B+u)\\r(Q''\cos u-P''\sin u)&=z\operatorname{cotg}(C+u).\end{aligned}$$

Die Gleichungen (6) werden demnach

$$(20)\begin{cases}dx=\frac{x}{r}.dr+x\operatorname{cotg}(A+u)du+r\cos u\,dP+r\sin u\,dQ\\dy=\frac{y}{r}.dr+y\operatorname{cotg}(B+u)du+r\cos u\,dP'+r\sin u\,dQ'\\dz=\frac{z}{r}.dr+z\operatorname{cotg}(C+u)du+r\cos u\,dP''+r\sin u\,dQ''\end{cases}$$

Da die Differentiale dP und dQ kein dr und du, sondern nur $d\Omega$ und di enthalten, so werden die partiellen Differentiale in Bezug auf r und u

$$(21)\begin{cases}\frac{dx}{dr}=\frac{x}{r},\quad \frac{dy}{dr}=\frac{y}{r},\quad \frac{dz}{dr}=\frac{z}{r}\\\frac{dx}{du}=x\operatorname{cotg}(A+u),\quad \frac{dy}{du}=y\operatorname{cotg}(B+u),\quad \frac{dz}{du}=z\operatorname{cotg}(C+u)\end{cases}$$

Für die übrigen Theile in (20) lassen sich die Formeln (5) mit Hülfe von (4) und (17) umformen in

$$(22)\begin{cases}\frac{dP}{d\Omega}=-P'\cos\varepsilon-P''\sin\varepsilon, & \frac{dQ}{d\Omega}=-Q'\cos\varepsilon-Q''\sin\varepsilon, & \frac{dQ}{di}=\cos a\\\frac{dP'}{d\Omega}=P\cos\varepsilon & \frac{dQ'}{d\Omega}=Q\cos\varepsilon & \frac{dQ'}{bi}=\cos b\\\frac{dP''}{d\Omega}=P\sin\varepsilon & \frac{dQ''}{d\Omega}=Q\sin\varepsilon & \frac{dQ''}{di}=\cos c\end{cases}$$

Damit wird

$$\begin{aligned}&r\cos u\,dP+r\sin u\,dQ\\&\quad=r\cos u(-P'\cos\varepsilon-P''\sin\varepsilon)d\Omega\quad=r\cos\varepsilon(-P'\cos u-Q'\sin u)d\Omega\\&\quad+r\sin u(-Q'\cos\varepsilon-Q''\sin\varepsilon)d\Omega\quad+r\sin\varepsilon(-P''\cos u-Q''\sin u)d\Omega\\&\quad+r\sin u\cos a\,di\qquad\qquad+r\sin u\cos a\,di\\&\qquad=(-y\cos\varepsilon-z\sin\varepsilon)d\Omega+r\sin u\cos a.di\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&r\cos u\,dP'+r\sin u\,dQ'=r\cos u.P.\cos\varepsilon.d\Omega+r\sin u.Q.\cos\varepsilon.d\Omega+r\sin u\cos b.di\\&\qquad=x\cos\varepsilon.d\Omega+r\sin u\cos b.di\end{aligned}$$

$$r\cos u\,dP''+r\sin u\,dQ''=r\cos u.P.\sin\varepsilon.d\Omega+r\sin u.Q.\sin\varepsilon.d\Omega+r\sin u\cos c.di$$
$$=x\sin\varepsilon.d\Omega+r\sin u\cos c.di$$

Dadurch gehen die Gleichungen (20) über in

$$(23)\begin{cases} dx=\frac{x}{r}dr+x\,\mathrm{cotg}(A+u)du-(y\cos\varepsilon+z\sin\varepsilon).d\Omega+r\sin u\cos a.di \\ dy=\frac{y}{r}dr+y\,\mathrm{cotg}(B+u)du+x\cos\varepsilon\,d\Omega+r\sin u\cos b.di \\ dz=\frac{z}{r}dr+z\,\mathrm{cotg}(C+u)du+x\sin\varepsilon\,d\Omega+r\sin u\cos c.di \end{cases}$$

und man erhält ferner die partiellen Differentiale

$$(24)\begin{cases} \frac{dx}{d\Omega}=-y\cos\varepsilon-z\sin\varepsilon, & \frac{dy}{d\Omega}=x\cos\varepsilon, & \frac{dz}{d\Omega}=x\sin\varepsilon \\ \frac{dx}{di}=r\sin u\cos a, & \frac{dy}{di}=r\sin u\cos b, & \frac{dz}{di}=r\sin u\cos c \end{cases}$$

Die Formeln (1), (21) und (24) sind in Bessels Abhandlung über den Olberschen Cometen, als diejenigen Formeln zusammengestellt, wonach der Einfluſs der Veränderungen der Elemente unmittelbar in Beziehung auf die gerade Aufsteigung und Abweichung berechnet wurde. (Abhdl. der mathematischen Klasse der Königl. Preuſs. Akademie der Wissenschaften aus den Jahren 1812—13. p. 139.)

§. 7.

In den Formeln (23) ist nun noch dr und du zu entwickeln, um die darin liegenden Differentiale der Elemente zu erhalten. Für du hat man, nach §. 2., bei rechtläufigen Bahnen $du=dv+d\pi-d\Omega$, also wenn man π, die Länge des Perihels und v, die wahre Anomalie einführt, so werden die Formeln (23) schon die Differentiale von drei Elementen der Bahn entwickelt angeben:

$$(25)\begin{cases} dx=\frac{x}{r}.dr+x\,\mathrm{cotg}(A+u)dv+x\,\mathrm{cotg}(A+u)d\pi \\ \qquad -[x\,\mathrm{cotg}(A+u)+y\cos\varepsilon+z\sin\varepsilon].d\Omega+r\sin u\cos a.di \\ dy=\frac{y}{r}.dr+y\,\mathrm{cotg}(B+u).dv+y\,\mathrm{cotg}(B+u)d\pi \\ \qquad -[y\,\mathrm{cotg}(B+u)-x\cos\varepsilon]d\Omega+r\sin u\cos b.di \\ dz=\frac{z}{r}.dr+z\,\mathrm{cotg}(C+u).dv+z\,\mathrm{cotg}(C+u)d\pi \\ \qquad -[z\,\mathrm{cotg}(C+u)-x\sin\varepsilon]d\Omega+r\sin u\cos c.di \end{cases}$$

§. 8.

Bei der noch übrigen Entwickelung von dr und dv in Bezug auf die Aenderungen der Elemente, wird hier nun von dem Gesichtspunkte ausgegangen, daſs die Bahn eine Ellipse von sehr groſser Excentricität ist.

Es sei p der halbe Parameter, e die Excentricität dividirt durch die halbe groſse Axe, so ist für die Ellipse

$r = \frac{p}{1+e\cos v}$ und bei $v=o$ wird $r=q=\frac{p}{1+e}$, daher

$r = \frac{q(1+e)}{1+e\cos v}$. Da nun $\cos v = \frac{1-\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2}{1+\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2}$ ist, so wird

$$r = \frac{q(1+e)}{1+e\,\frac{1-\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2}{1+\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2}} = \frac{q(1+e)(1+\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2)}{1+\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2+e(1-\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2)} = \frac{q(1+e)\sec\frac{1}{2}v^2}{1+e+(1-e)\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2}$$

$$r = \frac{q}{\cos\frac{1}{2}v^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1-e}{1+e}\cdot\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2} \quad \ldots . \ (26)$$

Die doppelte, in der Zeit $t-T$ vom rad. vect. beschriebene Fläche $=\int r^2 dv$, ist aber nach den Keplerschen Gesetzen

$$\int r^2\,dv = k(t-T)\sqrt{p} \quad \ldots . \ (27)$$

wo $\log k = 8{,}23558-10$ und damit die Zeiteinheit der mittlere Sonnentag, die Einheit für die Linien die halbe groſse Axe der Erdbahn ist *).

---

*) Wenn nämlich a die halbe groſse Axe, b die halbe kleine Axe einer Ellipse ist, also $b=\sqrt{ap}$, so wird die Fläche der ganzen Ellipse$=ab\pi=\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}$ und diese Fläche dividirt durch die Umlaufszeit $\Theta = \frac{\pi a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}}{\Theta} = \frac{f}{t-T}$ wenn f die Fläche des zur Zeit $t-T$ gehörigen Sectors bezeichnet, da nach dem zweiten Keplerschen Gesetze die Flächengeschwindigkeit constant ist. Nach dem dritten Keplerschen Gesetze ist aber $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\Theta}$ eine Constante für alle Planetenbahnen. Bestimmt man also z. B. nach der Erdbahn, wo $a=1$, $\Theta=365{,}256$ Tage ist, den Bruch $\frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\Theta}=k$ so wird $\log k=8{,}23558-10$ und $2f=\int r^2\,dv=k(t-T)\sqrt{p}$.

Schärfer als es hier zunächst nöthig ist hat man $\int r^2\,dv=k(t-T)\sqrt{p}\sqrt{(1+m)}$, wo m die Masse des bewegten Körpers, die Sonnenmasse $=1$ gesetzt, bezeichnet, und für die Bewegungsconstante k mit Rücksicht auf die Masse der Erde, nach deren Bahn sie bestimmt wurde, $\log k=8{,}2355814$. (S. §. 11.)

Setzt man den Werth von r^2 nach (26) ein, so wird

$$\int r^2\,dv = \int \frac{q^2}{\cos\frac{1}{2}v^4} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1-e}{1+e}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2\right)^2} \cdot dr = k(t-T)\sqrt{p} \quad \ldots\ldots (28)$$

Da nun $\frac{dv}{\cos v^2} = d\,\mathrm{tg}\,v$ oder $\frac{dv}{\cos\frac{1}{2}v^2} = 2\,d\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v$, so ist

$$r^2\,dv = \frac{q^2}{\cos\frac{1}{2}v^2} \cdot \frac{2\,d\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v}{\left(1+\frac{1-e}{1+e}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2\right)^2} = \frac{q^2(1+\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2)}{\left(1+\frac{1-e}{1+e}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v^2\right)^2} \cdot d\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v$$

Man setze $\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}v = \tau$, $\frac{1-e}{1+e} = \sigma$ und da $q = \frac{p}{1+e}$ ist, so erhält man

$$r^2\,dv = \frac{2p^2}{(1+e)^2} \cdot \frac{1+\tau^2}{(1+\sigma\tau^2)^2}$$

$$\int r^2\,dv = \frac{2p^2}{(1+e)^2} \cdot \int \frac{1+\tau^2}{(1+\sigma\tau^2)^2} \cdot d\tau \quad \ldots\ldots (29)$$

Die Division giebt

$$\frac{1}{(1+\sigma\tau^2)^2} = \frac{1}{1+2\sigma\tau^2+\sigma^2\tau^4} = 1 - 2\sigma\tau^2 + 3\sigma^2\tau^4 - 4\sigma^3\tau^6 + 5\sigma^4\tau^8 - \ldots$$

und die Multiplication mit $1+\tau^2$,

$$\frac{1+\tau^2}{(1+\sigma\tau^2)^2} = 1 + \tau^2 - 2\sigma(\tau^2+\tau^4) + 3\sigma^2(\tau^4+\tau^6) - 4\sigma^3(\tau^6+\tau^8) + \ldots$$

Multiplicirt man diese Reihe mit $d\tau$ und integrirt, so kommt

$$\int r^2\,dv = \frac{2p^2}{(1+e)^2} \cdot \left[\tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 - 2\sigma(\tfrac{1}{3}\tau^3 + \tfrac{1}{5}\tau^5) + 3\sigma^2(\tfrac{1}{5}\tau^5 + \tfrac{1}{7}\tau^7) - 4\sigma^3(\tfrac{1}{7}\tau^7 + \tfrac{1}{9}\tau^9)\right]$$

Setzt man $1-e=\delta$ also $1+e=2-\delta$, so ist

$$\sigma = \frac{1-e}{1+e} = \frac{\delta}{2-\delta} = \tfrac{1}{2}\delta + \tfrac{1}{4}\delta^2 + \tfrac{1}{8}\delta^3 + \ldots$$

$$\sigma^2 = \tfrac{1}{4}\delta^2 + 2.\tfrac{1}{8}\delta^3 + 3.\tfrac{1}{16}\delta^4 + \ldots$$

$$\sigma^3 = \tfrac{1}{8}\delta^3. + 3.\tfrac{1}{16}\delta^4 + \ldots$$

und damit

$$\int \frac{1+\tau^2}{(1+\sigma\tau^2)^2} \cdot d\tau = \tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 - \delta(\tfrac{1}{3}\tau^3 + \tfrac{1}{5}\tau^5) - \delta^2(\tfrac{1}{8}\tau^3 - \tfrac{1}{20}\tau^5 - \tfrac{3}{28}\tau^7)$$
$$- \delta^3(\tfrac{1}{12}\tau^3 - \tfrac{1}{10}\tau^5 - \tfrac{1}{28}\tau^7 + \tfrac{1}{18}\tau^9) \quad \ldots\ldots (30)$$

wo dem Integrale keine Constante hinzuzufügen ist, weil es mit $\tau = o$ verschwindet. Die Formeln (28), (29), (30) geben jetzt

$$\int r^2\,dv = k(t-T)\sqrt{p} = \frac{2p^2}{(1+e)^2}\left[\tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 - \delta(\tfrac{1}{3}\tau^3 + \tfrac{1}{5}\tau^5) - \ldots\right]$$

$p = q(1+e) = q(2-\delta)$, $2p^2 = 2q^2(2-\delta)^2$ eingesetzt, so wird

$$k(t-T)\sqrt{q}\sqrt{(2-\delta)} = \frac{2q^2(2-\delta)^2}{(2-\delta)^2} \cdot \left[\tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 - \delta(\tfrac{1}{3}\tau^3 + \tfrac{1}{5}\tau^5) - \ldots\right]$$

oder

$$\frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\delta)}} \cdot [\tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 \; . \; . \; . \; . \; .]$$

$\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\delta)}} = 1 + \frac{1}{4}\delta + \frac{3}{32}\delta^2 + \frac{5}{128}\delta^3 + \; . \; . \; . \; .$ substituirt, so wird

$$\frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \tau + \tfrac{1}{3}\tau^3 + \delta(\tfrac{1}{4}\tau - \tfrac{1}{4}\tau^3 - \tfrac{1}{5}\tau^5)$$
$$+ \delta^2(\tfrac{3}{32}\tau - \tfrac{7}{32}\tau^3 + \tfrac{3}{28}\tau^7)$$
$$+ \delta^3(\tfrac{5}{128}\tau - \tfrac{55}{384}\tau^3 + \tfrac{3}{32}\tau^5 + \tfrac{1}{16}\tau^7 - \tfrac{1}{16}\tau^9) \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31)$$

Dieser Ausdruck ist hier so weit entwickelt *), weil nachher bei den Störungsformeln wieder Gebrauch davon gemacht werden wird.

Es war $\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = \tau$ gesetzt und v bezeichnet die wahre Anomalie in der Ellipse. Man setze $v = w + \lambda$, wo λ eine sehr kleine Gröfse ist, wenn w die Anomalie in der Parabel bedeutet, welche sich der Ellipse nähert. Dann ist

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \tau = f(w+\lambda) = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(w+\lambda)$$

und nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$= fw + \frac{dfw}{dw}\lambda + \frac{d^2fw}{dw^2} \cdot \frac{\lambda^2}{1.2} + \; . \; . \; .$$

$$= \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w + \frac{d\operatorname{tg}\frac{1}{2}w}{dw}\lambda + \frac{d^2\operatorname{tg}\frac{1}{2}w}{dw^2} \cdot \frac{\lambda^2}{1.2} + \; . \; . \; .$$

$$d\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w = \frac{dw}{\cos w^2}, \quad d\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w = \frac{dw}{2\cos\frac{1}{2}w^2}, \quad \frac{d\operatorname{tg}\frac{1}{2}w}{dw} = \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}w^2} = \tfrac{1}{2}\sec\tfrac{1}{2}w^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^2)$$

$$\tau = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w + \tfrac{1}{2}\lambda(1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^2) \; . \; . \; . \; .$$
$$\tau^3 = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^3 + \tfrac{3}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^2\lambda(1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^2) \; . \; . \; . \; .$$
$$\tfrac{1}{3}\tau^3 = \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^3 + \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^2\lambda(1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^2) \; . \; . \; . \; .$$
$$\frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^3 + \tfrac{1}{2}\lambda(1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^2)^2 + \delta(\tfrac{1}{4}\tau - \tfrac{1}{4}\tau^3 - \tfrac{1}{5}\tau^5),$$

in der Parabel $= \operatorname{tg}\frac{1}{2}w + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^3$ zufolge der Integration des parabolischen Sectors;

in der Ellipse $= \operatorname{tg}\frac{1}{2}w + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^3 + \frac{1}{2}\lambda(1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}w^2)^2$
$+ \delta(\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w - \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^3 - \frac{1}{5}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^5)$,

---

*) Uebereinstimmend mit Posselt (Zeitschr. f. Astr. 5. Bd. 1818. p. 163.) wo nach einer von Bessel (M. C. 12. Bd. p. 201) entwickelten Gleichung noch ein Glied weiter angegeben ist.

wenn man die Produkte $\delta\lambda$ und λ^2 wegläfst. Hier sind die Gröfsen t, T und q in der Ellipse genau dieselben wie in der Parabel, und da auf der andern Seite die beiden ersten Glieder identisch sind, so müssen die beiden letzten in der Ellipse $= 0$ sein, ohne dafs $\lambda = 0$ und $\delta = 0$ ist, also, da $\lambda\delta$ u. s. w. vernachlässigt sind,

$$\tfrac{1}{2}\lambda(1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^2)^2 = -\delta(\tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w - \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^3 - \tfrac{1}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w^6)$$

$$\lambda = -\frac{\delta(\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w - \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^3 - \frac{1}{5}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^5)}{\frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^2)^2} = -\frac{\delta(\operatorname{tg}\frac{1}{2}w - \operatorname{tg}\frac{1}{2}w^3 - \frac{4}{5}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^5)}{2(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^2)^2}$$

Der Nenner ist $2+4\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^2+2\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^4$; dividirt man hiermit in den Zähler, indem man bei w^5 anfängt, so wird $\lambda = -\delta$ mal

$$\left[-\tfrac{2}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w + \frac{\frac{9}{5}(\operatorname{tg}\frac{1}{2}w + \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^3)}{2(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^2)^2}\right].$$

In den Zähler dieses Bruches der obige Werth gesetzt, so wird

$$\lambda = \delta\left[\tfrac{2}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w - \frac{\frac{9}{5}\cdot\frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}}{2(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}w^2)^2}\right]$$

$$= \delta\left[\tfrac{2}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w - \tfrac{9}{10}\cdot\frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}\cos\tfrac{1}{2}w^4\right],\quad \cos\tfrac{1}{2}w^4 = \frac{q}{r},$$

$$= \delta\left[\tfrac{2}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w - \tfrac{9}{10}\cdot\frac{k(t-T).\sqrt{q}}{r^2\sqrt{2}}\right] \text{ oder endlich}$$

$$\lambda = \delta\left[\tfrac{2}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}w - \tfrac{9}{20}\cdot\frac{k(t-T)}{r^2}\sqrt{2q}\right] \;.\;.\;.\;.\;.\; (32),$$

wenn w noch die Anomalie in der Parabel bezeichnet, wofür in dieser Näherungsformel also wieder v gesetzt werden kann. Dieser Ausdruck ist nun zugleich das Differential von v in Bezug auf e, da $v = w + \lambda$ und $\delta = 1 - e = -de$ ist, wenn man von $e = 1$ ausgeht; $\lambda = v - w$ oder $w + dw = v$ also $\lambda = +\delta w$ oder $+dv$, da man von der Parabel auf die Ellipse übergeht; $\frac{\lambda}{\delta} = -\frac{dv}{de}$, welches in die Gleichung (32) substituirt, giebt

$$\frac{dv}{de} = \tfrac{9}{20}\frac{k(t-T)}{r^2}\sqrt{2q} - \tfrac{2}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v \;.\;.\;.\;.\;.\; (33)$$

---

(33) Für $\frac{dv}{de}$ ist auch in demselben Falle entwickelt

$$\left(\frac{dv}{de}\right) = \left[\frac{9t}{2(1+9e)}\cdot\frac{k\sqrt{p}}{rr} - \frac{8\operatorname{tg}\frac{1}{2}v}{(1+e)(1+9e)}\right]$$

von Encke im Berl. Astr. Jahrb. f. 1822 p. 184, wo ebenfalls noch die Re-

Mit Hülfe des Vorhergehenden läßt sich auch das partielle Differential dr in Bezug auf de angeben. Da

$$r = \frac{p}{1+e\cos v} = \frac{(1+e)q}{1+e\cos v}, \text{ so ist}$$

$$dr = \frac{q(1-\cos v)}{(1+e\cos v)^2} . de + \frac{r^2 e \sin v}{(1+e)q} . dv \text{ oder } \frac{dr}{de} = \frac{q(1-\cos v)}{(1+e\cos v)^2} + \frac{r^2 e \sin v}{(1+e)q} . \frac{dv}{de} \text{ und da } e=1,$$

$$\frac{dr}{de} = \frac{q(1-\cos v)}{(1+\cos v)^2} + \frac{r^2 \sin v}{2q} . \frac{dv}{de}; \ (1+e\cos v)^2 = \frac{4q^2}{r^2}$$

und $1-\cos v = 2\sin\frac{1}{2}v^2$ substituirt,

$$\frac{dr}{de} = \frac{r^2 \sin\frac{1}{2}v^2}{2q} + \frac{r^2 \sin v}{2q} . \frac{dv}{de}.$$ Der Werth für $\frac{dv}{de}$ aus (33) eingesetzt, so wird

$$\frac{dr}{de} = \frac{r^2 \sin\frac{1}{2}v^2}{2q} + \tfrac{9}{20}\frac{k(t-T)\sin v}{\sqrt{2q}} - \tfrac{3}{5} . \frac{r^2 \sin v}{2q} . \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v$$

und da

$$\sin v = 2\sin\tfrac{1}{2}v\cos\tfrac{1}{2}v, \quad \sin v \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = 2\sin\tfrac{1}{2}v^2$$

so wird

$$\frac{r^2 \sin\frac{1}{2}v^2}{2q} - \tfrac{3}{5}\frac{r^2 \sin v}{2q} . \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \tfrac{1}{10} . \frac{r^2 \sin\frac{1}{2}v^2}{q} = \tfrac{1}{10} r \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2.$$

$$\frac{dr}{de} = \tfrac{9}{20} . \frac{k(t-T)\sin v}{\sqrt{2q}} + \tfrac{1}{10} r \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2 \quad \ldots\ldots (34)$$

§. 9.

Nachdem im vorigen §. dv und dr in Bezug auf de entwickelt sind, so bleiben jetzt nur noch die beiden letzten Elemente, die Zeit T des Periheldurchganges und die Periheldistanz q zu berücksichtigen übrig, also dT und dq zu finden in Bezug auf dv und dr.

Da man die höheren Differentiale von de vernachläßigt, so

---

sultate angegeben sind:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = \frac{k\sqrt{p}}{rr}, \quad \left(\frac{dv}{dq}\right) = -\frac{3tk\sqrt{p}}{2qrr}$$

mit der Bemerkung, dafs sie sich ohne Schwierigkeit ergeben, wenn die von Nicolai M. C. 27. Bd. p. 212 gegebenen Formeln nur noch etwas weiter entwickelt werden.

erhält man aus der Gleichung für die parabolische Bewegung, nämlich $\frac{k(t-T)}{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}=\operatorname{tg}\frac{1}{2}v+\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^3$, durch Differentiation eine Beziehung zwischen dv, dT und dq. Es ist

$$d.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v=\frac{dv}{2\cos\frac{1}{2}v^2}=\frac{dv}{2\frac{q}{r}}=\frac{r}{2q}.dv,\quad \tfrac{1}{3}d.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2.\frac{r}{2q}.dv,$$

$$d(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^3)=(1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2).\frac{r}{2q}.dv=\frac{r^2}{2q^2}.dv,\quad d.\frac{t-T}{q^{\frac{3}{2}}}$$

$$=-\frac{dT}{q^{\frac{3}{2}}}-\frac{(t-T)d.q^{\frac{3}{2}}}{q^{\frac{3}{2}}.q^{\frac{3}{2}}}=-\frac{dT}{q^{\frac{3}{2}}}-\tfrac{3}{2}.\frac{t-T}{q^{\frac{3}{2}}}.\frac{dq}{q}=\frac{r^2}{kq^2\sqrt{2}}.dv$$

$$dv=\frac{k\sqrt{2q}}{r^2}.dT-\frac{3k(t-T)}{r^2\sqrt{2q}}.dq\;.\;.\;.\;.\;.\;(35)$$

Um die Differentiale von T und q in Bezug auf r zu erhalten, hat man

$$r=\frac{q}{\cos\frac{1}{2}v^2},\quad dr=\frac{dq}{\cos\frac{1}{2}v^2}+\frac{q\cos\frac{1}{2}v\sin\frac{1}{2}v\,dv}{\cos\frac{1}{2}v^4}=\frac{rdq}{q}+r\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v.dv$$

und nach (30):

$$dr=\frac{r}{q}.dq+r\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\left(-\frac{k\sqrt{2q}}{r^2}dT-\frac{3k(t-T)}{r^2\sqrt{2q}}.dq\right)$$

$$=\left(\frac{r}{q}-\frac{3k(t-T)\operatorname{tg}\frac{1}{2}v}{r\sqrt{2q}}\right)dq-\frac{k\sqrt{2q}.\operatorname{tg}\frac{1}{2}v}{r}.dT$$

Setzt man im Coefficienten von dq für $t-T$ den Werth $\frac{q^{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}{k}(\operatorname{tg}\frac{1}{2}v+\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v^3)$, so wird dieser Coefficient

$$\frac{r}{q}-\frac{3q}{r}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^4)=\frac{1}{\cos\frac{1}{2}v^2}-3\cos\tfrac{1}{2}v^2(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2+\tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^4)$$

$$=1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2-3\sin\tfrac{1}{2}v^2-\sin\tfrac{1}{2}v^2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2=1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2\cos\tfrac{1}{2}v^2-3\sin\tfrac{1}{2}v^2=\cos v.$$

$dr=\cos v\,dq-\frac{k\sqrt{2q}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v}{r}.dT$ und wenn hier wieder $r=\frac{q}{\cos\frac{1}{2}v^2}$ gesetzt wird,

$$dr=\cos v\,dq-\frac{k\sin v}{\sqrt{2q}}.dT\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(36)$$

Die vollständigen Ausdrücke für dv und dr sind daher nach den vorhergehenden Formeln (33) — (36):

$$\left.\begin{aligned}dv&=-\frac{k\sqrt{2q}}{r^2}dT-\frac{3k(t-T)}{r^2\sqrt{2q}}.dq+\left[\tfrac{9}{10}.\frac{k(t-T)}{r^2}\sqrt{2q}-\tfrac{2}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v\right].de\\ dr&=-\frac{k}{\sqrt{2q}}\sin v\,dT+\cos v.dq+\left[\tfrac{9}{20}\frac{k(t-T)\sin v}{\sqrt{2q}}+\tfrac{1}{10}r\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2\right]de\end{aligned}\right\}(37)$$

§. 10.

Die Formeln (20) werden jetzt, wenn man sich auf die gefundenen partiellen Differentiale bezieht:

$$dx = \frac{x}{r}\left[\frac{dr}{dT}.dT + \frac{dr}{dq}.dq + \frac{dr}{de}.de\right] + x\operatorname{cotg}(A+u)\left[\frac{dv}{dT}dT + \frac{dv}{dq}.dq + \frac{dv}{de}.de\right] + x\operatorname{cotg}(A+u)d\pi + \frac{dx}{d\Omega}.d\Omega + \frac{dx}{di}.di$$

und ähnlich dy und dz, oder wie man es auch schreiben kann:

$$(38)\left\{\begin{aligned}
dx &= \left[\frac{dv}{dT}.\frac{dx}{dv} + \frac{dr}{dT}.\frac{dx}{dr}\right]dT + \left[\frac{dv}{dq}.\frac{dx}{dv} + \frac{dr}{dq}.\frac{dx}{dr}\right]dq \\
&\quad + \frac{dx}{d\pi}.d\pi + \frac{dx}{d\Omega}.d\Omega + \frac{dx}{di}.di + \left[\frac{dv}{de}.\frac{dx}{dv} + \frac{dr}{de}.\frac{dx}{dr}\right].de \\
dy &= \left[\frac{dv}{dT}.\frac{dy}{dv} + \frac{dr}{dT}.\frac{dy}{dr}\right]dT + \left[\frac{dv}{dq}.\frac{dy}{dv} + \frac{dr}{dq}.\frac{dy}{dr}\right]dq \\
&\quad + \frac{dy}{d\pi}.d\pi + \frac{dy}{d\Omega}.d\Omega + \frac{dy}{di}.di + \left[\frac{dv}{de}.\frac{dy}{dv} + \frac{dr}{de}.\frac{dy}{dr}\right].de \\
dz &= \left[\frac{dv}{dT}.\frac{dz}{dv} + \frac{dr}{dT}.\frac{dz}{dr}\right]dT + \left[\frac{dv}{dq}.\frac{dz}{dv} + \frac{dr}{dq}.\frac{dz}{dr}\right].dq \\
&\quad + \frac{dz}{d\pi}..d\pi + \frac{dz}{d\Omega}.d\Omega + \frac{dz}{di}.di + \left[\frac{dv}{de}.\frac{dz}{dv} + \frac{dr}{de}.\frac{dz}{dr}\right].de
\end{aligned}\right.$$

und die Werthe der einzelnen partiellen Differentiale sind nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{dv}{dT} = -\frac{k\sqrt{2q}}{r^2},\quad \frac{dv}{dq} = -\frac{3k(t-T)}{r^2\sqrt{2q}},\quad \frac{dv}{de} = \tfrac{9}{20}\,\frac{k(t-T)\sqrt{2q}}{r^2} - \tfrac{2}{5}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{k\sin v}{\sqrt{2q}},\quad \frac{dr}{dq} = \cos v,\quad \frac{dr}{de} = \tfrac{9}{20}\,\frac{k(t-T)\sin v}{\sqrt{2q}} + \tfrac{1}{10}r\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v^2$$

$$\frac{dx}{dv} = x\operatorname{cotg}(A+u),\quad \frac{dx}{dr} = \frac{x}{r},\quad \frac{dx}{d\pi} = \operatorname{cotg}(A+u)$$

$$\frac{dx}{d\Omega} = -x\operatorname{cotg}(A+u) - y\cos\varepsilon - z\sin\varepsilon,\quad \frac{dx}{di} = r\sin u\cos a$$

$$\frac{dy}{dv} = y\operatorname{cotg}(B+u),\quad \frac{dy}{dr} = \frac{y}{r},\quad \frac{dy}{d\pi} = y\operatorname{cotg}(B+u)$$

$$\frac{dy}{d\Omega} = -y\operatorname{cotg}(B+u) + x\cos\varepsilon,\quad \frac{dy}{di} = r\sin u\cos b$$

$$\frac{dz}{dv} = z\operatorname{cotg}(C+u),\quad \frac{dz}{dr} = \frac{z}{r},\quad \frac{dz}{d\pi} = z\operatorname{cotg}(C+u)$$

$$\frac{dz}{d\Omega} = -z\operatorname{cotg}(C+u) + x\sin\varepsilon,\quad \frac{dz}{di} = \sin u\cos c.$$

Nach der Berechnung von (38) giebt die Substitution in (1) die Aenderungen der Rectascension und Declination:

$$\cos\delta \,.\, d\alpha = -\frac{\sin\alpha}{\varDelta} \,.\, dx + \frac{\cos\alpha}{\varDelta}\, dy$$

$$d\delta = -\frac{\cos\alpha \sin\delta}{\varDelta} \,.\, dx - \frac{\sin\alpha \sin\delta}{\varDelta} \,.\, dy + \frac{\cos\delta}{\varDelta} \,.\, dz$$

Um $d \log q$ statt dq einzuführen, hat man, nach $d \log q = \frac{dq}{q}$, die Formeln $\frac{dv}{d \log q} = -\frac{3}{2}(t-T)\frac{k\sqrt{2q}}{r^2}$ und $\frac{dr}{d \log q} = \cos v \,.\, q$, wobei nur noch d log brigg $q = 0{,}43429 \,.\, d \log q$ zu berücksichtigen ist.

Eine Zusammenstellung der vorhergehenden für die Rechnung fertigen Formeln findet sich auch bei der Bahnbestimmung des Cometen von 1723 in einer Dissertation von Dr. G. Spörer: De cometa qui anno 1723 apparuit. Berolini 1843.

Zweiter Abschnitt.

Entwickelung der Differentialformeln für die Aenderungen der Elemente durch die planetarischen Störungen.

§. 11.

Vermöge der allgemeinen Schwere wirken aufser der Kraft der Sonne noch die Kräfte der Planeten auf den Cometen, in der Art, dafs wenn m' die Masse eines Planeten, ϱ' seine Entfernung vom Cometen ist, der Ausdruck für diese Anziehung $\frac{m'}{\varrho'^2}$ wird. Hier sind m' und ϱ' ungleichartige Gröfsen. Man drückt m' in Theilen der Sonnenmasse, ϱ' in Theilen der halben grofsen Axe der Erdbahn aus und erhält damit eine Zahl für die anziehende Kraft. Diese Zahl wird $= 1$, wenn $m' = 1$ und $\varrho' = 1$ ist, so dafs die Kraft womit die Erde von der Sonne in ihrer mittleren Entfernung angezogen wird, hier als Einheit der Kräfte zu nehmen wäre und auch oft genommen worden ist. Wenn man nun die Bewegung berechnen will, welche durch die störende Kraft veranlafst wird, so kommt natürlich auch die Zeit in Betracht und damit die Geschwindigkeit. Diese letzte ist wieder ein Ausdruck der Kraft, die sich nämlich in ihrer Wirkung eben durch die Geschwindigkeit äufsert, welche sie einem freien materiellen Punkte mittheilen würde. Die Gröfse der Geschwindigkeit wird aber schon durch den Quotienten angegeben, welchen man erhält, wenn man den durchlaufenen Weg durch die dazu gebrauchte Zeit dividirt.

Es sind demnach bei der Rechnung drei an sich willkührliche Einheiten festzustellen, die Längeneinheit, die Zeiteinheit und die Krafteinheit; man wird sie aber so wählen, dafs die Strecke 1

dividirt durch die Zeit 1, die Geschwindigkeit oder die Kraft 1 ausdrückt, und daher ist nach der Annahme je zweier dieser Einheiten die dritte nicht mehr willkührlich sondern von selbst bestimmt. Behält man also für die Längeneinheit die halbe grofse Axe der Erdbahn, für die Zeiteinheit den mittleren Sonnentag, so wird für die Krafteinheit diejenige Kraft zu nehmen sein, welche die Geschwindigkeit 1 hervorbringt, wodurch der bewegte Punkt, nach der Wirkung dieser Kraft sich selbst überlassen, die Strecke 1 in der Zeit 1 durchlaufen würde (oder 20 Mill. Meilen in einem Tage). Nun ist aber die Anziehungskraft keine blofs momentan, sondern fortdauernd wirkende, also ist auch bei der Bestimmung der Kraft, welche als Einheit dienen soll, die Zeit anzugeben, in der sie gewirkt hat. Demnach wird die Krafteinheit diejenige Kraft, welche die Geschwindigkeit 1 hervorbringt, nachdem sie während der Zeit 1 in der Entfernung 1 gewirkt hat.

Die Anziehungskraft der Sonne, in der Entfernung 1, ergiebt sich dann als ein sehr kleiner Bruch der Krafteinheit. Um diesen Bruch zu bestimmen kann man vorläufig die Erdmasse gegen die Sonnenmasse als verschwindend betrachten und den Satz anwenden, dafs die Umlaufszeiten der Planeten nur von den grofsen Axen ihrer Bahnen abhängen; dafs also ein Körper, der sich in der Entfernung 1 in einem Kreise um die Sonne bewegt, in der Zeit $\Theta = 365{,}256..$ Tagen seinen Umlauf vollenden, seine lineare Geschwindigkeit in einem Tage daher $\frac{2\pi}{\Theta} = k$ sein würde (nach der früheren Bezeichnung §. 8. wo $\pi = 3{,}14159.$, $k = 0{,}01720.$, $\log k = 8{,}23558 - 10$ ist). Der täglich durchlaufene Bogen wäre demnach $= k$ und in einem halben Tage $= \frac{k}{2}$ u. s. w., da die Bewegung im Kreise gleichförmig ist. Macht man den Bogen k durch Division mit einer grofsen Zahl n so klein, dafs man ein Bogenelement $\frac{k}{n}$ erhält, dessen Sinusversus $= 2\sin\frac{1}{2}\frac{k^2}{n} = 2.\frac{1}{4}\frac{k^2}{n^2} = \frac{k^2}{2n^2}$ gesetzt werden kann, welches um so näher sein wird je gröfser n ist; dann kann man auch den Bogen $\frac{k}{n}$ als die Diagonale oder Resultante zweier Kräfte ansehen,

wovon die eine in der Richtung der Tangente wirkt und die andere den Sinusversus $=\frac{k^2}{2n^2}$ als den Fallraum gegen die Sonne in der Zeit $\frac{1}{n}$ hervorgebracht hat. Die erlangte Endgeschwindigkeit ist das Doppelte hiervon oder $\frac{k^2}{n^2}$, so dafs die Anziehungskraft der Sonne in der Zeit $\frac{1}{n}$ die Geschwindigkeit $\frac{k^2}{n}$ erzeugen würde, in der Zeit $\frac{2}{n}$ die doppelte und endlich in der Zeit $\frac{n}{n}=1$ die Geschwindigkeit $n.\frac{k^2}{n^2}=\frac{k^2}{n}$ immer noch in Bezug auf das Zeitelement $\frac{1}{n}$, folglich in Bezug auf die Zeit 1 würde diese Geschwindigkeit das $n$fache oder k^2 werden. Es ist also $k^2=0{,}00029..$ der Ausdruck für die Anziehungskraft der Sonne in der Entfernung 1.

Für jede andere Entfernung r ist diese Kraft mithin $=\frac{k^2}{r^2}$, von $r=\infty$ bis zur Sonnenoberfläche, wo $r=0{,}00467\ldots$ und $\frac{k^2}{r^2}=13{,}6..$ wird.

Wäre in der obigen Bestimmung der Anziehungskraft der Sonne sofort der zum Bogen k gehörige Sinusversus oder $2\sin\frac{1}{2}k^2$ gleich dem Fallraum in einem Tage und $=\frac{k^2}{2}$ gesetzt worden, so würde freilich auch für die Kraft der Sonne k^2 kommen und man sieht, dafs die Fehler dieser beiden Voraussetzungen sich gegenseitig aufheben; denn erstens kann nicht der Sinusversus eines jeden Bogens gleich dem Fallraum gegen die Sonne gesetzt werden und zweitens gilt die gemachte Abkürzung nicht für jeden Sinusversus, sondern beides nur näherungsweise, je kleiner die Bögen sind *). Es folgt aber daraus, dafs der Fallraum ge-

*) Gegen die Zulässigkeit des Satzes überhaupt, auch für unendlich kleine Bögen, hat Ide in der deutschen Bearbeitung von Laplace, Thèorie du mouvement et de la figure elliptique des Planètes, einige Einwürfe gemacht, die ihn selbst zu dem Resultate brachten, p. 69. l. c.: „jener Raum der durch die Centralkraft entsteht, ist nicht der einfache Sinusversus, sondern der doppelte". Es ergiebt sich aber bei der nachherigen Uebereinstimmung der Resultate, dafs hier unter „jener Raum" nicht der Fallraum gegen die Sonne, sondern die erlangte Endgeschwindigkeit zu verstehen ist, weil die Wirkung der „Kraft" dadurch nach jedem Zeittheile repräsentirt werden soll.

gen die Sonne genau der Hälfte des Quadrates des beschriebenen Kreisbogens gleich ist. Wenn daher dieser Bogen von der Gröfse 1 oder $57^{\circ},295\ldots$ genommen wird, so ist der dazu gehörige Fallraum gegen die Sonne $=\frac{1}{2}$ und die Endgeschwindigkeit in Bezug auf die dazu gehörige Zeit $=1$, folglich auch die Kraft $=1$. Hierbei hätte man also die Längeneinheit wie früher gelassen und die Anziehungskraft in der Entfernung 1 zur Krafteinheit genommen, wodurch die Zeiteinheit diejenige Zeit würde, welche der Körper gebraucht um den Kreisbogen 1 zu beschreiben $=\frac{365,256}{2\pi}=\frac{1}{k}=58,132\ldots$ Tage. Statt dieser Annahme wird die obige hier beibehalten werden, wodurch die Zeiteinheit der Tag bleibt.

Es ist nur noch bei der Bestimmung von k die Ergänzung des dritten Keplerschen Gesetzes zu berücksichtigen, da strenge genommen, die Umlaufszeiten Θ der Planeten nicht blofs von den halben grofsen Axen a sondern auch von den Massen m abhängen. Die Sonnenmasse $=1$ gesetzt, so ist $\Theta^2 : \Theta'^2 = \frac{a^3}{1+m} : \frac{a'^3}{1+m'}$ oder $\Theta : \Theta' = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m)}} : \frac{a'^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(1+m')}}$. Nun sei $a=1$, $m'=o$ also $k=\frac{2\pi}{\Theta'}$; ferner sei auch $a=1$, $m=$ der Erdmasse, also $\Theta=365,256\ldots$ Tage, so ist $\Theta'=\Theta\sqrt{(1+m)}$ und $k=\frac{2\pi}{\Theta\sqrt{(1+m)}}$ welches mit $m=\frac{1}{354710}$ und $\Theta=365,2563835$ angenommen, $\log k = 8,2355814.4$, $\log k^2 = 6,4711629 - 10$ giebt. Das sind die Werthe, welche Gaufs in der Theoria motus p. 2. angewandt hat. Die neueren Bestimmungen der Jahreslänge (Bessel Astr. Nachr. No. 133) und der Erdmasse (Encke Abhdlg. der Berl. Akad. d. Wissensch. 1835) ändern $\log k^2$ nur erst in der 8ten Decimalstelle.

§. 12.

Wenn die störende Kraft in paralleler Richtung und mit gleicher Intensität auf die Sonne wie auf den Cometen wirkt, so wird der Ort des letzteren in Bezug auf die Sonne sich nicht ändern können und es wird also die Störung nur von dem Un-

terschiede der Wirkungen abhängen, welche die störende Kraft auf die Sonne und auf den Cometen übt. Wenn nun wieder m' die Masse des störenden Planeten, r' die Entfernung desselben von der Sonne, x', y', z' seine drei rechtwinkligen Coordinaten bezeichnet, deren Axen durch die Sonne gelegt sind, so ist erstlich die Kraft womit die Sonne von dem störenden Körper angezogen wird $=\frac{k^2 m'}{r'^2}$, da m' nicht in der Krafteinheit, sondern als ein Bruch der Sonnenmasse ausgedrückt wird. Um diese Kraft nach den Richtungen der Coordinaten zu zerlegen, hat man sie mit den bezüglichen Cosinussen oder mit $\frac{x'}{r'}, \frac{y'}{r'}, \frac{z'}{r'}$ zu multipliciren, also erhält man dafür:

$$\frac{k^2 m' x'}{r'^3}, \quad \frac{k^2 m' y'}{r'^3}, \quad \frac{k^2 m' z'}{r'^3}$$

Ebenso, wenn ϱ' die Entfernung des Cometen von dem störenden Planeten ist, wird die Kraft, womit der Comet vom Planeten angezogen wird, nach den drei Richtungen zerlegt:

$$\frac{k^2 m'(x'-x)}{\varrho'^3}, \quad \frac{k^2 m'(y'-y)}{\varrho'^3}, \quad \frac{k^2 m'(z'-z)}{\varrho'^3}$$

wo x, y, z wieder die Coordinaten des Cometen sind. Die Differenzen oder die störenden Kräfte werden mithin:

$$\left.\begin{array}{l} \text{nach } x \ldots k^2 m' \left(\frac{x'}{r'^3} - \frac{x'-x}{\varrho'^3}\right) = k^2 A \\ \quad - \quad y \ldots k^2 m' \left(\frac{y'}{r'^3} - \frac{y'-y}{\varrho'^3}\right) = k^2 B \\ \quad - \quad z \ldots k^2 m' \left(\frac{z'}{r'^3} - \frac{z'-z}{\varrho'^3}\right) = k^2 C \end{array}\right\} \ldots (39)$$

wenn A, B, C zur Abkürzung die Factoren von k^2 bezeichnen. Die Richtung der störenden Kräfte möge positiv genommen werden, wenn diese Ausdrücke positive Werthe geben, also wenn die Coordinaten des Cometen dadurch vermindert werden.

Die Anziehungskraft der Sonne strebt immer die Coordinaten des Cometen zu vermindern und man hat dafür, wenn r die Entfernung des Cometen von der Sonne ist,

$$\left.\begin{array}{lll}\text{die Kraft nach } x \ldots \frac{k^2 x}{r^3} \\ \quad - \quad - \quad y \ldots \frac{k^2 y}{r^3} \\ \quad - \quad - \quad z \ldots \frac{k^2 z}{r^3}\end{array}\right\} \ldots (40)$$

Alle hier in Betracht gekommenen Kräfte sind nicht bloſs momentan, sondern anhaltend wirkende Kräfte, in deren Begriff es liegt, daſs sie Geschwindigkeiten hervorzubringen streben, welche der Zeit proportional sind. So erhält man z. B. aus den letzten Formeln die Geschwindigkeit nach x oder $\frac{dx}{dt}$ $= -\frac{k^2 x}{r^3} \cdot t$, wo das Vorzeichen — geschrieben ist, da die Kraft das x zu vermindern strebt. Differenzirt man diese Gleichung hier in Bezug auf dx und t, indem man dt als constant annimmt und den Ausdruck der Kraft ebenfalls constant läſst, da der Werth dafür durch das jedesmalige x und r bestimmt wird; dann ergiebt sich $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k^2 x}{r^3}$. Berücksichtigt man aber die störende Kraft ebenfalls, so ist aus den Formeln (39) und (40) die ganze nach x wirkende Kraft $= \frac{k^2 x}{r^3} + k^2 A$ und die Geschwindigkeit, welche sie vereinigt hervorbringen würde, wenn sie allein auf einen vorher in Ruhe befindlichen Punkt gewirkt hätte, ist $\frac{dx}{dt} = -\left(\frac{k^2 x}{r^3} + k^2 A\right) . t$, folglich $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k^2 x}{r^3} - k^2 A$ und ebenso für die übrigen Kräfte, also

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 x}{r^3} + k^2 A = 0 \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2 y}{r^3} + k^2 B = 0 \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 z}{r^3} + k^2 C = 0\end{array}\right\} \ldots (41)$$

Das sind die Grundgleichungen für die Bewegung des Cometen in Bezug auf die Sonne, deren Anziehung durch den Cometen dabei vernachlässigt ist. Diese Gleichungen behalten dieselbe Form, wenn man statt eines störenden Körpers mehrere in Betracht zieht und also unter A, B, C die Summen versteht:

$$\left.\begin{aligned}A&=m'\left(\frac{x'}{r'^3}-\frac{x'-x}{\varrho'^3}\right)+m''\left(\frac{x''}{r''^3}-\frac{x''-x}{\varrho''^3}\right)+\ldots\\B&=m'\left(\frac{y'}{r'^3}-\frac{y'-y}{\varrho'^3}\right)+m''\left(\frac{y''}{r''^3}-\frac{y''-y}{\varrho''^3}\right)+\ldots\\C&=m'\left(\frac{z'}{r'^3}-\frac{z'-z}{\varrho'^3}\right)+m''\left(\frac{z''}{r''^3}-\frac{z''-z}{\varrho''^3}\right)+\ldots\end{aligned}\right\}\ldots(42)$$

Die Grundgleichungen ändern sich auch nicht durch den Umstand, dafs der Comet von einer andern (unbekannten) Kraft in Bewegung gesetzt worden ist, da die allgemeine Gravitation auf ruhende und bewegte Körper gleichwirkend angenommen wird, und jene Kraft sich nur noch durch die einmal mitgetheilte Bewegung zu erkennen giebt, ohne ihre Wirkung zu erneuern. Die dadurch hervorgebrachte Geschwindigkeit ist also eine Constante, deren Differential in den Gleichungen (41) verschwinden mufs, und die erst nach der Integration als willkührliche Constante wieder erscheint, welche nur durch die Beobachtungen zu bestimmen ist. Wenn die andern Kräfte aufhörten, ihre Einwirkung auf den Cometen beständig zu erneuern, so würden sie ebenfalls aus den Gleichungen (41) verschwinden, denn diese Gleichungen entstanden durch die Voraussetzung von fortdauernd wirkenden Kräften; die Geschwindigkeiten nach dem Aufhören der Kräfte würden nicht mehr der Zeit proportional sein; man würde haben $\frac{dx}{dt}=-\frac{k^2x}{r^3}-k^2A=\text{const.}$, $\frac{d^2x}{dt}=o$, $\frac{d^2y}{dt}=o$, $\frac{d^2z}{dt}=o$, woraus durch Integration $\frac{dx}{dt}=a$, $\frac{dy}{dt}=b$, $\frac{dz}{dt}=c$ entsteht, wenn a, b, c die willkührlichen Constanten sind; eine zweite Integration würde geben $x=at+a'$, $y=bt+b'$, $z=ct+c'$, wo a', b', c' die hinzugekommenen Constanten der letzten Integration bezeichnen. Es ist also

$$t=\frac{x-a'}{a}=\frac{y-b'}{b}=\frac{z-c'}{c}$$

oder

$$(x-a')\frac{b}{a}+b'=y=x.\frac{b}{a}-\frac{a'b}{a}+b'$$

$$(x-a')\frac{c}{a}+c'=z=x.\frac{c}{a}-\frac{a'c}{a}+c'$$

Die Bahn würde demnach eine gerade Linie, deren Lage von den Constanten abhängt. Für eine andere Zeit t' wäre

$$x' = at' + a', \quad y' = bt' + b', \quad z' = ct' + c'$$

folglich $x' - x = a(t' - t)$, $y' - y = b(t' - t)$, $z' - z = c(t' - t)$

und wenn s ein Theil dieser geraden Linie ist, so wird

$$s = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$
$$= (t' - t)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

mithin ist s der Zeit proportional, oder die Bewegung in dieser geraden Linie würde eine gleichförmige sein, und die Geschwindigkeit von den Constanten der ersten Integration abhängen.

§. 13.

Aus den Gleich. (41) erhält man durch Multiplication mit

$$\begin{array}{c|c|c|} y & z & \\ -x & & z \\ & -x & -y \end{array}$$

die Summen als Gleichungen woraus r eliminirt ist, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{y\,d^2x - x\,d^2y}{dt^2} &= -k^2(Ay - Bx) \\ \frac{z\,d^2x - x\,d^2z}{dt^2} &= -k^2(Az - Cx) \\ \frac{z\,d^2y - y\,d^2z}{dt^2} &= -k^2(Bz - Cy) \end{aligned}\right\} \ldots (43)$$

oder

$$\frac{d(y\,dx - x\,dy)}{dt} = -k^2(Ay - Bx)\,dt$$
$$\frac{d(z\,dx - x\,dz)}{dt} = -k^2(Az - Cx)\,dt$$
$$\frac{d(z\,dy - y\,dz)}{dt} = -k^2(Bz - Cy)\,dt$$

Man setze

$$\left.\begin{aligned} dP &= -k^2(Ay - Bx)\,dt = \frac{d(y\,dx - x\,dy)}{dt} \\ dQ &= -k^2(Az - Cx)\,dt = \frac{d(z\,dx - x\,dz)}{dt} \\ dR &= -k^2(Bz - Cy)\,dt = \frac{d(z\,dy - y\,dz)}{dt} \end{aligned}\right\} \ldots (44)$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} P &= \frac{y\,dx - x\,dy}{dt} \\ Q &= \frac{z\,dx - x\,dz}{dt} \\ R &= \frac{z\,dy - y\,dz}{dt} \end{aligned}\right\} \ldots (45)$$

wobei die Constanten der Integration schon in den Gröſsen P, Q, R enthalten sind, da diese Gröſsen nur durch ihre Differentiale dP, dQ, dR eingeführt wurden. Wären nun A, B, $C = o$ gewesen, also $dP = o$, $dQ = o$, $dR = o$, so würden P, Q, R einfach die Constanten der Integration sein.

Aus diesen letzten Gleichungen kann man schon eine endliche algebraische Gleichung ableiten, indem man sie nur mit z, $-y$, x multiplicirt; dann ist die Summe

$$Pz - Qy + Rx = 0 \ldots (46)$$

die Gleichung einer Ebene, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und deren Lage von den Constanten P, Q, R abhängt. Diese Gröſsen P, Q, R sind aber nur dann Constanten, wenn A, B, $C = o$ sind, anderen Falls enthalten sie auſser dem constanten Theile, welcher durch die Integration entstand, noch einen variabelen Theil, der von den störenden Kräften A, B, C abhängt. Die Ebene der Bahn wird also veränderlich sein, weil die Gröſsen P, Q, R es sind.

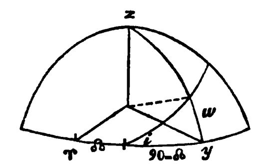
Aus denselben Gleichungen (45) erhält man nach der Multiplication mit dz, $-dy$, dx die Summe

$$P\,dz - Q\,dy + R\,dx = 0 \ldots (47)$$

also die Gleichung einer Ebene in welcher der Comet die Theile dx, dy, dz beschreibt während eines Zeitelements dt, und dieser Ausdruck ist zugleich das Differential des vorhergehenden, so genommen, daſs P, Q, R constant sind, oder daſs $z\,dP$ gegen $P\,dz$ u. s. w. verschwindet. Obgleich also P, Q, R veränderliche Gröſsen sind, so wird man sie doch während eines Zeittheils dt als constant betrachten können, worin der Comet ein Element seiner Bahn beschreibt.

Die Gröſsen P, Q, R, welche die Lage der Bahn bestimmen durch die Gleichung $Pz - Qy + Rx = o$, müssen also die

beiden Elemente Ω und i enthalten. Setzt man $z=o$ so wird $-Qy+Rx=o$ die Gleichung der Linie, in welcher die Bahnebene die Ebene der (x, y) schneidet, welches hier die Ebene der Ekliptik sein möge; dann ist $y=\frac{R}{Q}.x$, also $\frac{R}{Q}$ die Tangente des Winkels, welchen die Durchschnittslinie mit der Axe der x bildet, oder $\frac{R}{Q}=\text{tang}\,\Omega$. Setzt man $x=o$ so ist $Pz-Qy=o$,



die Gleichung der Linie, in welcher die Bahnebene die Ebene der (y, z) schneidet, und $z=\frac{Q}{P}y=\text{tg}\,w.y$, wo $\text{tg}\,w=\cos\Omega\,\text{tg}\,i$ ist, also

$$\frac{Q}{P\cos\Omega}=\text{tg}\,i=\frac{Q\sqrt{(1+\text{tg}\,\Omega^2)}}{P}=\frac{Q\sqrt{\left[1+\left(\frac{R}{Q}\right)^2\right]}}{P}=\frac{\sqrt{(Q^2+R^2)}}{P}$$

Die Beziehungen sind daher

$$\frac{R}{Q}=\text{tg}\,\Omega \quad \text{und} \quad \frac{\sqrt{(Q^2+R^2)}}{P}=\text{tg}\,i$$

$$\frac{Q}{P}=\cos\Omega\,\text{tg}\,i \qquad \frac{R}{P}=\sin\Omega\,\text{tg}\,i$$

Substituirt man in die Gleichungen $Pz-Qy+Rx=o$ die Werthe $P=\frac{Q}{\cos\Omega\,\text{tg}\,i}$, $R=Q\,\text{tg}\,\Omega$ so wird $\frac{Q.z}{\cos\Omega\,\text{tg}\,i}-Qy+Q\,\text{tg}\,\Omega.x=o$ oder die Gleichung für die Ebene der Bahn ist auch, nachdem man mit $\cos\Omega\sin i$ multiplicirt hat, transformirt in

$$x\sin\Omega\sin i-y\cos\Omega\sin i+z\cos i=o \quad . \; . \; . \; (48)$$

Man könnte nun mit Hülfe der Differentialformeln (44) die Aenderungen der beiden Elemente Ω nnd i bestimmen; nachher aus den Grundgleichungen neue Integrale ableiten, welche die Gleichung der Bahn geben, wobei die noch übrigen Elemente für die Dimension der Bahn als Constanten der Integration erscheinen, wenn man die störenden Kräfte $=o$ setzt, mit Berücksichtigung der Störungen aber einen variabelen Theil enthalten, den man indessen, wie vorhin, während der Zeit dt als constant betrachten kann; so würde man auf diesem von La-

grange *) angegebenen Wege die Differentialformeln für die Aenderungen der Elemente durch die Störungen bestimmen. Um aber directer zu den für die Rechnung bequemsten Formeln zu gelangen, scheint es angemessener, dem Wege zu folgen, auf welchem Bessel **) die Lagrangesche Methode entwickelt hat, da hier derselbe Zweck, welchen Bessel dabei hatte und namentlich eine Bahn von großer Excentricität in Betracht kommt.

§. 14.

Die nöthigen Hülfsformeln sind schon im Vorhergehenden enthalten. Schreibt man in den Formeln (7) statt A, B, C, welche in diesem Abschnitte die störenden Kräfte bezeichnen, respective α, β, γ und setzt man statt des Arguments der Breite u den Werth $w+v$, wo w den Winkel zwischen Perihel und Knoten, nämlich $w=\pi-\Omega$ für rechtläufige Bewegung (§. 3.) bezeichnet, so sind die Formeln

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin a\sin(\alpha+w+v) \\ y &= r\sin b\sin(\beta+w+v) \\ z &= r\sin c\sin(\gamma+w+v) \end{aligned}\right\} \ldots (49)$$

Bezieht man diese Coordinaten, welche aus den schließlichen Formeln wieder verschwinden, der Einfachheit wegen auf die Ekliptik als Grundebene, so geben die Gleichungen (8) wenn man die Schiefe der Ekliptik, $\varepsilon=o$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} \sin a\sin\alpha &= \cos\Omega & \sin a\cos\alpha &= -\sin\Omega\cos i \\ \sin b\sin\beta &= \sin\Omega & \sin b\cos\beta &= +\cos\Omega\cos i \\ \sin c\sin\gamma &= o & \sin c\cos\gamma &= +\sin i \end{aligned}\right\} \ldots (50)$$

woraus durch Division

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg}\alpha &= -\operatorname{tg}\Omega\cos i \\ \operatorname{cotg}\beta &= +\operatorname{cotg}\Omega\cos i \\ \operatorname{cotg}\gamma &= \infty \end{aligned}$$

*) Théorie des variations séculaires des élémens des Planètes. 1. Partie. Formules générales pour déterminer ces variations. Par M. de la Grange. (Nouveaux Mémoires de l'Académy royale des sciences et belles-lettres. Année 1781. Berlin 1783.)

**) Untersuchungen über die scheinbare und wahre Bahn des im Jahre 1807 erschienenen großen Kometen von F. W. Bessel. Königsberg 1810.

und zufolge der Formeln (17) und (18)

$$\left.\begin{array}{l}\sin a \sin b \sin(\alpha-\beta)=\cos i \\ \sin a \sin c \sin(\alpha-\gamma)=\sin i \cos \Omega \\ \sin b \sin c \sin(\beta-\gamma)=\sin i \sin \Omega\end{array}\right\} \ldots (51)$$

Die Gleichungen (16) und (18) geben

$$1=[\sin a \sin b \sin(\alpha-\beta)]^2+[\sin a \sin c \sin(\alpha-\gamma)]^2+[\sin b \sin c \sin(\beta-\gamma)]^2 \ldots (52)$$

und die Formeln (11) und (14) werden:

$$1=\sin a^2 \sin(\alpha+w+v)^2+\sin b^2 \sin(\beta+w+v)^2+\sin c^2 \sin(\gamma+w+v)^2 \ldots (53)$$

$$1=\sin a^2 \cos(\alpha+w+v)^2+\sin b^2 \cos(\beta+w+v)^2+\sin c^2 \cos(\gamma+w+v)^2 \ldots (54)$$

Die Differenz dieser beiden Gleichungen wird

$$o=\sin a^2 [\sin(\alpha+w+v)^2-\cos(\alpha+w+v)^2]+\ldots$$

oder

$$o=\sin a^2 \cos 2(\alpha+w+v)+\sin b^2 \cos 2(\beta+w+v)+\sin c^2 \cos 2(\gamma+w+v)$$

und wenn man darin für die einzige Variabele, also willkührliche Gröfse $w+v$, den Werth 45^0+w+v setzt, mithin statt

$$2(\alpha+w+v) \ldots\ldots 2(\alpha+45+w+v)=90^0+2(\alpha+w+v),$$

statt

$$\cos 2(\alpha+w+v) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \cos[90+2(\alpha+w+v)]=-\sin 2(\alpha+w+v)$$
$$=-2\sin(\alpha+w+v)\cos(\alpha+w+v),$$

so erhält man

$$o=\sin a^2 \sin(\alpha+w+v)\cos(\alpha+w+v)+\sin b^2 \sin(\beta+w+v)\cos(\beta+w+v)$$
$$+\sin c^2 \sin(\gamma+w+v)\cos(\gamma+w+v) \ldots (55)$$

Multiplicirt man die Gleichungen (17) respective mit x, y, z so wird

$$x\cos a+y\cos b+z\cos c=x\sin\Omega\sin i-y\cos\Omega\sin i+z\cos i$$

also, wie man aus der Vergleichung mit (48) sieht, ein neuer Ausdruck für die Ebene der Bahn. Setzt man noch zur Controlle aus (18) hinzu:

$$=x\sin b\sin c\sin(\beta-\gamma)-y\sin a\sin c\sin(\alpha-\gamma)+z\sin a\sin b\sin(\alpha-\beta)$$

und durch Substitution der Werthe für $x, y, z \ldots$

$$=r\sin a\sin b\sin c\sin(\alpha+w+v)\sin(\beta-\gamma)$$
$$-r\sin a\sin b\sin c\sin(\beta+w+v)\sin(\alpha-\gamma)$$
$$+r\sin a\sin b\sin c\sin(\gamma+w+v)\sin(\alpha-\beta)$$
$$=r\sin a\sin b\sin c[\sin(\alpha+w+v)\sin(\beta-\gamma)-\sin(\gamma+w+v)\sin(\alpha-\gamma)$$
$$+\sin(\gamma+w+v)\sin(\alpha-\beta)$$

wo die Gröfse in [ ] $=o$ ist, da allgemein

$$\sin a\sin(b-c)-\sin b\sin(a-c)+\sin c\sin(a-b)=o$$

so wird daher für die Ebene der Bahn die Gleichung auch

$$x\cos a+y\cos b+z\cos c=o \ldots (56)$$

oder in Uebereinstimmung mit (48):

$$x \sin \Omega \sin i - y \cos \Omega \sin i + z \cos i = o.$$

§. 15.

Differenzirt man die Gleichungen (49), wobei man nach dem vorhin (§. 13) aufgestellten Princip, die nur von den beiden Elementen Ω und i abhängigen Gröſsen a, b, c, α, β, γ so wie w während des Zeittheils dt als constant betrachtet, so wird

$$dx = \sin a \sin(\alpha + w + v)\, dr + r \sin a \cos(\alpha + w + v)\, d(w + v)$$
$$dy = \sin b \sin(\beta + w + v)\, dr + r \sin b \cos(\beta + w + v)\, d(w + v)$$
$$dz = \sin c \sin(\gamma + w + v)\, dr + r \sin c \cos(\gamma + w + v)\, d(w + v)$$

und da

$$x = r \sin a \sin(\alpha + w + v), \quad y = r \sin b \sin(\beta + w + v), \quad z = r \sin c \sin(\gamma + w + v)$$

so ist

$$y\,dx - x\,dy = r^2 d(w + v) \sin a \sin b \sin(\beta - \alpha)$$
$$z\,dx - x\,dz = r^2 d(w + v) \sin a \sin c \sin(\gamma - \alpha)$$
$$z\,dy - y\,dz = r^2 d(w + v) \sin b \sin c \sin(\gamma - \beta)$$

Die zweite Differentiation giebt, wenn noch mit dt^2 dividirt wird:

$$\frac{d(y\,dx - x\,dy)}{dt^2} = d\left[r^2 \frac{d(w+v)}{dt} . \sin a \sin b \sin(\beta - \alpha)\right] : dt$$
$$\frac{d(z\,dx - x\,dz)}{dt^2} = d\left[r^2 \frac{d(w+v)}{dt} . \sin a \sin c \sin(\gamma - \alpha)\right] : dt$$
$$\frac{d(z\,dy - y\,dz)}{dt^2} = d\left[r^2 \frac{d(w+v)}{dt} . \sin b \sin c \sin(\gamma - \beta)\right] : dt$$

und wenn man für die linke Seite dieser Gleichungen ihren Werth aus (43) setzt:

$$\left.\begin{aligned} o &= d\left[r^2 \frac{d(w+v)}{dt} \sin a \sin b \sin(\beta - \alpha)\right] : dt + k^2(Ay - Bx) \\ o &= d\left[r^2 \frac{d(w+v)}{dt} \sin a \sin c \sin(\gamma - \alpha)\right] : dt + k^2(Az - Cx) \\ o &= d\left[r^2 \frac{d(w+v)}{dt} \sin b \sin c \sin(\gamma - \beta)\right] : dt + k^2(Bz - Cy) \end{aligned}\right\} \ldots (57)$$

§. 16.

Die Gleichung (27) §. 8. gab für die Fläche des in der Zeit $(t - T)$ vom rad. vect. beschriebenen Sectors

$$\tfrac{1}{2} \int r^2 dv = \tfrac{1}{2} k(t - T)\sqrt{p}$$

$$\text{daher } r^2 dv = k\sqrt{p}\, dt \text{ oder } \frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p}}{r^2} \ldots (58)$$

Ferner ist $r=\frac{p}{1+e\cos v}$ also $dr=\frac{r^2 e\sin v\, dv}{p}=\frac{r^2 e\sin v}{p}.\frac{k\sqrt{p}}{r^2}.dt$ nach (58)

folglich $\frac{dr}{dt}=\frac{k}{\sqrt{p}}e\sin v\ldots$ (59)

Wenn nun c die lineare Geschwindigkeit ist, also $c=\frac{ds}{dt}$ und ψ der Winkel, den die Richtung der fortschreitenden Bewegung mit dem verlängerten rad. vect. macht, so ist

$$c\cos\psi=\frac{ds}{dt}\cos\psi=\frac{dr}{dt}=\frac{k}{\sqrt{p}}e\sin v \quad \text{nach (59)}$$

$$c\sin\psi=\frac{ds}{dt}\sin\psi=\frac{r\,dv}{dt}=\frac{k\sqrt{p}}{r} \quad \text{- (58)}$$

daher auch $\frac{r^2 dv}{dt}=r c\sin\psi=k\sqrt{p}$ und

$$c^2(\cos\psi^2+\sin\psi^2)=\frac{k^2}{p}e^2\sin v^2+\frac{k^2}{r^2}p=\frac{k^2}{p}e^2\sin v^2+\frac{k^2}{p}(1+e\cos v)^2$$

$$c^2=\frac{k^2}{p}[e^2\sin v^2+(1+e\cos v)^2]=\frac{k^2}{p}[1+2e\cos v+e^2]=k^2.\frac{1+2e\cos v+e^2}{r(1+e\cos v)}$$

$$=k^2\left(\frac{1}{r}+\frac{e\cos v+e^2}{r(1+e\cos v)}\right) \qquad =k^2\left(\frac{1}{r}+\frac{e\cos v+e^2}{p}\right)$$

Nun ist auch $e^2=\frac{a-p}{a}$, wenn a die halbe grofse Axe der Ellipse ist,

$$\frac{e^2}{p}=\frac{a-p}{ap}=\frac{1}{p}-\frac{1}{a} \text{ und } e\cos v=\frac{p}{r}-1.$$

Diese Werthe substituirt:

$$c^2=k^2\left(\frac{1}{r}+\frac{\frac{p}{r}-1}{p}+\frac{1}{p}-\frac{1}{a}\right)=k^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \text{ oder } \frac{1}{2a}=\frac{1}{r}-\frac{c^2}{2k^2}$$

und für $c^2=\frac{ds^2}{dt^2}=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}$ gesetzt, so wird

$$\frac{1}{2a}=\frac{1}{r}-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2.k^2}\ldots(60)\ *)$$

Multiplicirt man jetzt die Gleichungen (41) respective mit $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ so erhält man

$$o=\frac{d^2x}{dt^3}.dx+\frac{k^2x}{r^3}.\frac{dx}{dt}+k^2A.\frac{dx}{dt}$$

$$o=\frac{d^2y}{dt^3}.dy+\frac{k^2y}{r^3}.\frac{dy}{dt}+k^2B.\frac{dy}{dt}$$

$$o=\frac{d^2z}{dt^3}.dz+\frac{k^2z}{r^3}.\frac{dz}{dt}+k^2C.\frac{dz}{dt}$$

*) Laplace, Méc. cél. Livr. II. Art. 18. p. 163.

Da nun $d^2 x dx = \frac{1}{2} d(dx^2)$ u. s. w. und $x dx + y dy + z dz = r dr$ so wird die Summe der drei vorhergehenden Gleichungen:

$$o = \tfrac{1}{2} d(dx^2 + dy^2 + dz^2) : dt^3 + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{k^2}{r^2} + k^2 A \cdot \frac{dx}{dt} + k^2 B \cdot \frac{dy}{dt} + k^2 C \cdot \frac{dz}{dt}$$

und die Differentiation der Gleichung (60) giebt nach der Division mit dt

$$\frac{d\left(\frac{1}{2a}\right)}{dt} = -\frac{dr}{r^2} \cdot \frac{1}{dt} - \frac{d(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{2 dt^2 . k^2} \cdot \frac{1}{dt}$$

oder $\dfrac{k^2 d\left(\frac{1}{2a}\right)}{dt} = -\dfrac{dr}{r^2} \cdot \dfrac{k^2}{dt} - \dfrac{\frac{1}{2} d(dx^2 + dy^2 + dz^2)}{dt^3}$, daher

$$o = -\frac{d\left(\frac{1}{2a}\right)}{dt} + A . \frac{dx}{dt} + B . \frac{dy}{dt} + C . \frac{dz}{dt} \; \ldots (61)$$

Die Multiplication der Grundgleichungen (41) mit x, y, z giebt

$$o = \frac{x d^2 x}{dt^2} + \frac{k^2 x^2}{r^3} + k^2 A x$$

$$o = \frac{y d^2 y}{dt^2} + \frac{k^2 y^2}{r^3} + k^2 B y$$

$$o = \frac{z d^2 z}{dt^2} + \frac{k^2 z^2}{r^3} + k^2 C z$$

und da $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r dr = x dx + y dy + z dz$

$$d(r dr) = r d^2 r + dr^2 = x d^2 x + dx^2 + y d^2 y + dy^2 + z d^2 z + dz^2$$

aber $dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) k^2 dt^2$ nach (60), folglich

$$\frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{dt^2} = \frac{d(r dr)}{dt^2} - \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) k^2 \ldots (62)$$

$$o = \frac{d . r\left(\frac{dr}{dt}\right)}{dt} + \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r}\right) k^2 - \frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{dt^2}$$

und die Summe der drei obigen Gleichungen giebt

$$o = \frac{k^2}{r} + k^2 A x + k^2 B y + k^2 C z + \frac{x d^2 x + y d^2 y + z d^2 z}{dt^2}$$

mithin ist die Summe der beiden letzten Gleichungen

$$o = \frac{d . r\left(\frac{dr}{dt}\right)}{dt} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right) k^2 + (Ax + By + Cz) k^2 \ldots (63)$$

§. 17.

Man sieht aus den vorhergehenden Formeln, wie es auch schon in den Grundgleichungen (41) liegt, dafs die anziehenden Kräfte, welche auf den Cometen wirken, immer nur den Differentialen der zweiten Ordnung seiner Coordinaten (mit Einschlufs der Polarcoordinaten r und v) dividirt durch dt^2, entsprechen.

Führt man die in (57) angedeutete Differentiation weiter aus, so werden diese Gleichungen,

$$o = \frac{d.\left(r^2\frac{d(w+v)}{dt}\right)}{dt}.\sin a\sin b\sin(\beta-\alpha)+r^2\frac{d(w+v)}{dt}.\frac{d[\sin a\sin b\sin(\beta-\alpha)]}{dt}$$
$$+k^2(Ay-Bx)$$

$$o = \frac{d.\left(r^2\frac{d(w+v)}{dt}\right)}{dt}.\sin a\sin c\sin(\gamma-\alpha)+r^2\frac{d(w+v)}{dt}.\frac{d[\sin a\sin c\sin(\gamma-\alpha)]}{dt}$$
$$+k^2(Az-Cx)$$

$$o = \frac{d.\left(r^2\frac{d(w+v)}{dt}\right)}{dt}.\sin b\sin c\sin(\gamma-\beta)+r^2\frac{d(w+v)}{dt}.\frac{d[\sin b\sin c\sin(\gamma-\beta)]}{dt}$$
$$+k^2(Bz-Cy)$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit

$$\begin{array}{l|l|l} \sin a\sin b\sin(\beta-\alpha) & +\sin c\cos\gamma & -\sin c\sin\gamma \\ \sin a\sin c\sin(\gamma-\alpha) & -\sin b\cos\beta & +\sin c\sin\beta \\ \sin b\sin c\sin(\gamma-\beta) & +\sin a\cos\alpha & -\sin a\sin\alpha \end{array}$$

und addirt, so erhält man zuerst mit Hülfe der Formel (52)

$$\left.\begin{aligned} o = \frac{d\left(r^2\frac{d(w+v)}{dt}\right)}{dt} &+k^2(Ay-Bx)\sin a\sin b\sin(\beta-\alpha) \\ &+k^2(Az-Cx)\sin a\sin c\sin(\gamma-\alpha) \\ &+k^2(Bz-Cy)\sin b\sin c\sin(\gamma-\beta) \end{aligned}\right\}\ldots(64)$$

da das Uebrige $=o$ wird, indem es zufolge der Gleichungen (51) den Factor hat:

$$-\cos i d\cos i-\sin i\cos\Omega d.\sin i\cos\Omega-\sin i\sin\Omega d.\sin i\sin\Omega$$
$$\left.\begin{aligned} =-\cos i\sin i di-\sin i\cos\Omega^2\cos i.di &-\sin i\sin\Omega^2\cos i.di \\ +\sin i^2\cos\Omega\sin\Omega.d\Omega &-\sin i^2\sin\Omega\cos\Omega.d\Omega \end{aligned}\right\}=o.$$

Die zweite angedeutete Multiplication giebt

$$o = d\,\frac{r^2\,\frac{d(w+u)}{dt}}{dt}.\,[\sin a \sin b \sin(\beta-\alpha)\sin c\cos\gamma - \sin a \sin c \sin(\gamma-\alpha)\sin b\cos\beta$$
$$+\sin b \sin c \sin(\gamma-\beta)\sin a\cos\alpha]$$
$$+k^2(Ay-Bx)\sin c\cos\gamma - k^2(Az-Cx)\sin b\cos\beta + k^2(Bz-Cy)\sin a\cos\alpha$$

$+$ der Gröſse mit dem Factor $r^2\,\frac{d(w+v)}{dt^2}$

Die Gröſse in [ ] ist $= o$, da ihre Theile der Reihe nach werden:

$$-\cos i\sin i + \sin i\cos\Omega^2\cos i + \sin i\sin\Omega^2\cos i = o$$

Die noch hinzuzufügende Gröſse ist

$$r^2\,\frac{d(w+v)}{dt^2}.\left\{\sin c\cos\gamma.\,d[\sin a\sin b\sin(\beta-\alpha)]\right.$$
$$-\sin b\cos\beta.\,d[\sin a\sin c\sin(\gamma-\alpha)]$$
$$\left.+\sin a.\cos\alpha.\,d[\sin b\sin c\sin(\gamma-\beta)]\right\}$$

Der Factor in { } wird nach den Gleichungen (50) und (51):

$$-\sin i d.\cos i + \cos\Omega\cos i d.\sin i\cos\Omega + \sin\Omega\cos i d.\sin i\sin\Omega =$$
$$= \sin i^2 di + \cos\Omega^2\cos i^2 di + \sin\Omega^2\cos i^2 di$$
$$-\cos\Omega\cos i\sin\Omega\sin i d\Omega + \sin\Omega\cos\Omega\sin i\cos i d\Omega$$

$= di$, daher

$$o = r^2.\frac{di}{dt}.\frac{d(w+v)}{dt} + k^2(Ay-Bx)\sin c\cos\gamma - k^2(Az-Cx)\sin b\cos\beta$$
$$+k^2(Bz-Cy)\sin a\cos\alpha \;.\;.\;.\; (65)$$

Die letzte Multiplication giebt endlich

$$o = d\frac{r^2\,d(w+v)}{dt^2}\Big[-\sin a\sin b\sin(\beta-\alpha)\sin c\sin\gamma$$
$$+\sin a\sin c\sin(\gamma-\alpha)\sin b\sin\beta$$
$$-\sin b\sin c\sin(\gamma-\beta)\sin a\sin\alpha\Big]$$
$$-k^2(Ay-Bx)\sin c\sin\gamma + k^2(Az-Cx)\sin b\sin\beta - k^2(Bz-Cy)\sin a\sin\alpha$$

$+$ der übrigen Gröſse mit dem Factor $\frac{r^2\,d(w+v)}{dt^2}$

Für den Ausdruck in [ ] hat man wieder zufolge der Gleichung (51) und (50):

$$o - \sin i\cos\Omega\sin\Omega + \sin i\sin\Omega\cos\Omega = o$$

und es ist mit Rücksicht auf die Gleichungen (51) die noch hinzuzufügende Gröſse

$$\frac{r^2\,d(w+v)}{dt^2}\Big[+\sin c\sin\gamma\,d\cos i - \sin b\sin\beta\,d.\sin i\cos\Omega + \sin a\sin\alpha\,d.\sin i\sin\Omega\Big]$$

woraus man durch die Gleichung (50) erhält

$$\frac{r^2 d(w+v)}{dt^2}\left[-\sin\Omega\, d.\sin i\cos\Omega+\cos\Omega\, d\sin i\sin\Omega\right]=\frac{r^2 d(w+v)}{dt^2}.\sin i\, d\Omega$$

und demnach

$$o=r^2\sin i.\frac{d\Omega}{dt}.\frac{d(w+v)}{dt}-k^2(Ay-Bx)\sin c\sin\gamma+k^2(Az-Cx)\sin b\sin\beta$$
$$-k^2(Bz-Cy)\sin a\sin\alpha\ .\ .\ .\ (66)$$

§. 18.

Bisher war die störende Kraft oder die Summe der störenden Kräfte nach den Richtungen der drei Coordinatenaxen x, y, z zerlegt und danach mit k^2A, k^2B, k^2C bezeichnet. Man kann aber die vorhergehenden Formeln dadurch vereinfachen, daſs man eine andere Zerlegung der störenden Kräfte wählt, nämlich:
k^2A' in der Richtung des rad. vect. nach der Sonne hin wirkend,
k^2B' senkrecht auf den rad. vect. in der Ebene der Bahn,
k^2C' senkrecht auf die Bahn gerichtet.

Wie bei einer jeden derartigen Zerlegung nach rechtwinkligen Coordinaten ist dann

$$A^2+B^2+C^2=A'^2+B'^2+C'^2$$

und es wird durch Multiplication mit den Cosinussen der Winkel, welche die neue Kraft A' mit den vorigen bildet:

$$A'=A.\frac{x}{r}+B.\frac{y}{r}+C.\frac{z}{r}$$

oder zufolge der Gleichung (49)

$$A'=A\sin a\sin(\alpha+w+v)+B\sin b\sin(\beta+w+v)+C\sin c\sin(\gamma+w+v)$$

Um die Kraft B' zu bestimmen, kann man sich eine andere Bahn in derselben Ebene denken, deren Elemente dieselben sind, ausgenommen, daſs w sich in $90+w$ verwandelt, dann wird der neue rad. vect. senkrecht auf dem vorigen stehen und die Kraft B' ihn zu vermindern streben, wenn sie positiv ist. Man erhält also durch Substitution von $90+w$ statt w, die vorige Gleichung verwandelt in

$$B'=A\sin a\cos(\alpha+w+v)+B\sin b\cos(\beta+w+v)+C\sin c\cos(\gamma+w+v)$$

wo die Factoren von A, B, C, die Cosinus der Winkel sind, welche die Senkrechte auf dem rad. vect. mit den Axen der x, y, z bildet.

Aehnlich damit ist auch

$$C' = A\cos a + B\cos b + C\cos c$$

wenn a, b, c wie bisher die Winkel sind, welche die auf der Ebene der Bahn und ihrem nördlichen Pole zugewandte Senkrechte mit den Axen der x, y, z macht, so daſs, da hier für die Ebene der (x, y) die Ekliptik genommen ist, nach den Formeln (17):

$$\cos a = \sin\Omega \sin i \qquad \cos b = -\cos\Omega \sin i \qquad \cos c = \cos i.$$

Die neuen Kräfte A' B' C' können demnach aus den vorigen A, B, C bestimmt werden durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A' &= A\sin a\sin(\alpha+w+v) + B\sin b\sin(\beta+w+v) + C\sin c\sin(\gamma+w+v) \\ B' &= A\sin a\cos(\alpha+w+v) + B\sin b\cos(\beta+w+v) + C\sin c\cos(\gamma+w+v) \\ C' &= A\sin\Omega\sin i \qquad - B\cos\Omega\sin i \qquad + C\cos i \end{aligned}\right\} \ldots (67)$$

oder

$$C' = A\cos a \qquad + B\cos b \qquad + C\cos c$$

wo man sieht, daſs C' nur insofern variabel ist, als A, B, C es sind, und a, b, c sich mit der Zeit ändern, während bei A' und B' schon immer die Variabele v eingreift, da die Richtung des rad. vect. sich mit jedem Augenblicke ändert.

Um wieder A, B, C durch A', B', C' ausgedrückt zu erhalten, kann man diese Gleichungen mit

$\sin a\sin(\alpha+w+v)$	$\sin b\sin(\beta+w+v)$	$\sin c\sin(\gamma+w+v)$
$\sin a\cos(\alpha+w+v)$	$\sin b\cos(\beta+w+v)$	$\sin c\cos(\gamma+w+v)$
$\sin\Omega\sin i$	$-\cos\Omega\sin i$	$\cos i$

multipliciren und die drei Produkte jedesmal addiren, wobei man auch etwas einfacher statt der Werthe der letzten Reihe die gleichgeltenden $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ schreiben kann. Die Summe der Quadrate der ersten Columne dieser Factoren ist nämlich $\sin a^2 + \cos a^2 = 1$; die der zweiten $= \sin b^2 + \cos b^2 = 1$ und die der dritten $\sin c^2 + \cos c^2 = 1$.

Die Summe der Producte aus der ersten und zweiten Columne ist

$\sin a \sin b \cos(\alpha - \beta) + \cos a \cos b = o$ nach (19) da $\cos(\alpha - \beta)$
$= -\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b$ ist.

Die Summe der Producte aus der ersten und dritten Columne ist

$\sin a \sin c \cos(\alpha - \gamma) + \cos a \cos c = o$ wegen $\cos(\alpha - \gamma) = -\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} c$

und ebenso ist aus der zweiten und dritten Columne

$\sin b \sin c \cos(\beta-\gamma)+\cos b \cos c=o$ weil $\cos(\beta-\gamma)=-\operatorname{cotg} b \cos c$ ist nach (19).

Es wird demnach

$$\left.\begin{aligned}
A&=A' \sin a \sin(\alpha+w+v)+B' \sin a \cos(\alpha+w+v)+C' \sin \Omega \sin i\\
B&=A' \sin b \sin(\beta+w+v)+B' \sin b \cos(\beta+w+v)-C' \cos \Omega \sin i\\
C&=A' \sin c \sin(\gamma+w+v)+B' \sin c \cos(\gamma+w+v)+C' \cos i
\end{aligned}\right\} \ldots (68)$$

oder indem man überall die Constanten einführt

$$\left.\begin{aligned}
&+C' \cos a\\
&+C' \cos b\\
&+C' \cos c
\end{aligned}\right\}$$

§. 19.

Die neuen Kräfte $k^2 A'$, $k^2 B'$, $k^2 C'$ sind nun in die verschiedenen Störungsformeln zu substituiren für $k^2 A$, $k^2 B$, $k^2 C$, wodurch die Formeln vereinfacht werden.

Die Formel (61) war

$$o=-\frac{d\left(\frac{1}{2a}\right)}{dt}+A\frac{dx}{dt}+B.\frac{dy}{dt}+C.\frac{dz}{dt},$$ und es ist nach (49)

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt}&=\frac{dr}{dt}.\sin a \sin(\alpha+w+v)+\frac{dv}{dt} r \sin a \cos(\alpha+w+v)\\
\frac{dy}{dt}&=\frac{dr}{dt}.\sin b \sin(\beta+w+v)+\frac{dv}{dt} r \sin b \cos(\beta+w+v)\\
\frac{dz}{dt}&=\frac{dr}{dt}.\sin c \sin(\gamma+w+v)+\frac{dv}{dt} r \sin c \cos(\gamma+w+v)
\end{aligned}$$

und nach der Multiplication mit den Werthen von A, B, C aus (68) erhält man

$$A.\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}$$

$$\begin{aligned}
=A'.\Big[&\frac{dr}{dt}\sin a^2 \sin(\alpha+w+v)^2+\frac{dv}{dt} r \sin a^2 \sin(\alpha+w+v)\cos(\alpha+w+v)\\
&+\frac{dr}{dt}\sin b^2 \sin(\beta+w+v)^2+\frac{dv}{dt} r \sin b^2 \sin(\beta+w+v)\cos(\beta+w+v)\\
&+\frac{dr}{dt}\sin c^2 \sin(\gamma+w+v)^2+\frac{dv}{dt} r \sin c^2 \sin(\gamma+w+v)\cos(\gamma+w+v)\Big]\\
+B'.\Big[&\frac{dr}{dt}\sin a^2 \sin(\alpha+w+v)\cos(\alpha+w+v)+\frac{dv}{dt} r \sin a^2 \cos(\alpha+w+v)^2\\
&+\frac{dr}{dt}\sin b^2 \sin(\beta+w+v)\cos(\beta+w+v)+\frac{dv}{dt} r \sin b^2 \cos(\beta+w+v)^2\\
&+\frac{dr}{dt}\sin c^2 \sin(\gamma+w+v)\cos(\gamma+w+v)+\frac{dv}{dt} r \sin c^2 \cos(\gamma+w+v)^2\Big]
\end{aligned}$$

$$+C'.\left[\frac{dr}{dt}\sin a\cos a\sin(\alpha+w+v)+\frac{dv}{dt}.r\sin a\cos a\cos(\alpha+w+v)\right.$$

$$+\frac{dr}{dt}\sin b\cos b\sin(\beta+w+v)+\frac{dv}{dt}.r\sin b\cos b\cos(\beta+w+v)$$

$$\left.+\frac{dr}{dt}\sin c\cos c\sin(\gamma+w+v)+\frac{dv}{dt}.r\sin c\cos c\cos(\gamma+w+v)\right]$$

Der erste Theil mit dem Factor A' reducirt sich vermöge der Gleichung (53) und (55) auf $A'.\frac{dr}{dt}$ oder es ist $A'.dr=A\,dx+B\,dy+C\,dz$ wie auch aus der Gleichung im vorigen §.: $A'=A.\frac{x}{r}+B.\frac{y}{r}+C.\frac{z}{r}$ sich ergiebt.

Der zweite Theil, dessen Factor B' ist, wird zufolge der Gleichung (55) und (54) einfach $=B'.\frac{dv}{dt}.r$

Der dritte Theil verschwindet gänzlich, indem man $\sin a \sin(\alpha+w+v)=\frac{x}{r}$, $\sin b\sin(\beta+w+v)=\frac{y}{r}$, $\sin c\sin(\gamma+w+v)=\frac{z}{r}$ substituiren kann, wodurch dann der gemeinschaftliche Factor für die mit $\frac{dr}{dt}$ multiplicirten Gröfsen, $x\cos a+y\cos b+z\cos c$ wird, welches nach (56) $=o$ ist; ferner kann man nach Gleichung (18) substituiren: $\cos a=\sin b\sin c\sin(\beta-\gamma)$, $\cos b=-\sin a\sin c\sin(\alpha-\gamma)$, $\cos c=\sin a\sin b\sin(\alpha-\beta)$, wodurch die Summe

$$r\sin a\sin b\sin c[\cos(\alpha+w+v)\sin(\beta-\gamma)-\cos(\beta+w+v)\sin(\alpha-\gamma)$$
$$+\cos(\gamma+w+v)\sin(\alpha-\beta)]$$

entsteht, welche $=o$ ist, da allgemein $\cos a\sin(b-c)-\cos b\sin(a-c)+\cos c\sin(a-b)=o$.

Man erhält also

$$A.\frac{dx}{dt}+B.\frac{dy}{dt}+C.\frac{dz}{dt}=A'.\frac{dr}{dt}+B'.\frac{rdv}{dt}$$

und wenn für $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{rdv}{dt}$ ihre Werthe aus (59) und (58) gesetzt werden,

$$A'.\frac{dr}{dt}+B'.\frac{rdv}{dt}=A'.\frac{ke\sin v}{\sqrt{p}}+B'.\frac{k\sqrt{p}}{r}=\frac{k}{\sqrt{p}}\left[A'e\sin v+\frac{B'p}{r}\right]$$

oder da $r=\frac{p}{1+e\cos v}$ ist, $\ldots=\frac{k}{\sqrt{p}}\left[A'e\sin v+B'(1+e\cos v)\right]$, folglich

$$A.\frac{dx}{dt}+B.\frac{dy}{dt}+C.\frac{dz}{dt}=\frac{k}{\sqrt{p}}\left[B'+e(A'\sin v+B'\cos v)\right]$$

und die Gleichung (61) wird transformirt in

$$o=-\frac{d\left(\frac{1}{2a}\right)}{dt}+\frac{k}{\sqrt{p}}\left[B'+e(A'\sin v+B'\cos v)\right]\ldots(61^*)$$

Die Gleichung (63) verwandelt sich sogleich nach dem Vorhergehenden in

$$o=\frac{d.r\frac{dr}{dt}}{dt}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{r}\right)k^2+rA'k^2\ \ldots(63^*)$$

Zur Transformation der Gleichung (64) hat man nach (68)

$$\begin{aligned}Ay&=A'.r\sin a\sin b\sin(\alpha+w+v)\sin(\beta+w+v)\\&+B'.r\sin a\sin b\sin(\alpha+w+v)\sin(\beta+w+v)\\&+C'.\cos a.y\\Bx&=A'.r\sin a\sin b\sin(\alpha+w+v)\sin(\beta+w+v)\\&+B'.r\sin a\sin b\sin(\alpha+w+v)\sin(\beta+w+v)\\&+C'.\cos b.z\\Ay-Bx&=B'r\sin a\sin b\sin(\beta-\alpha)+C'(y\cos a-x\cos b)\\Az&=A'.r\sin a\sin c\sin(\alpha+w+v)\sin(\gamma+w+v)\\&+B'.r\sin a\cos(\alpha+w+v)\sin c\sin(\gamma+w+v)\\&+C'.\cos a.z\\Cx&=A'r\sin c\sin(\gamma+w+v)\sin a\sin(\alpha+w+v)\\&+B'r\sin c\cos(\gamma+w+v)\sin a\sin(\alpha+w+v)\\&+C'.\cos c.x\\Az-Cx&=B'r\sin a\sin c\sin(\gamma-\alpha)+C'(z\cos a-x\cos c),\end{aligned}$$

und so auch

$$Bz-Cy=B'r\sin b\sin c\sin(\gamma-\beta)+C'(z\cos b-y\cos c)$$

Man hat demnach mit Berücksichtigung der Ausdrücke für die cos von a, b, c in den Formeln (18):

$$\begin{aligned}(Ay-Bx).\sin a\sin b\sin(\beta-\alpha)&=B'r\sin a^2\sin b^2\sin(\beta-\alpha)^2\\&-C'(y\cos a-x\cos b)\cos c.\\(Az-Cx).\sin a\sin c\sin(\gamma-\alpha)&=B'r\sin a^2\sin c^2\sin(\gamma-\alpha)^2\\&+C'(z\cos a-x\cos c)\cos b\\(Bz-Cy).\sin b\sin c\sin(\gamma-\beta)&=B'r\sin b^2\sin c^2\sin(\gamma-\beta)^2\\&-C'(z\cos b-y\cos c)\cos a.\end{aligned}$$

In der Summe dieser Gleichungen wird der Factor von $B'r = 1$ nach (52) und der Factor von C' wird $= o$, da seine Theile sich gegenseitig vernichten. Die Gleichung (64) verwandelt sich daher in

$$o = \frac{d.r^2 \frac{d(w+v)}{dt}}{dt} + rB'.k^2 \ldots (64^*)$$

Für die Transformation der Gleichungen (65) und (66) scheint es einfacher, die Werthe für x, y, z aus §. 2. zu benutzen, wo $u = w + v$ ist, so daſs

$$x = r[\cos\Omega\cos(w+v) - \sin\Omega\sin(w+v)\cos i]$$
$$y = r[\sin\Omega\cos(w+v) + \cos\Omega\sin(w+v)\cos i]$$
$$z = r\sin(w+v)\sin i$$

Die Gleichung (65) wird mit Rücksicht auf (50)

$$o = r^2.\frac{di}{dt}.\frac{d(w+v)}{dt} + k^2(Ay - Bx)\sin i - k^2(Az - Cx)\cos\Omega\cos i$$
$$- k^2(Bz - Cy)\sin\Omega\cos i$$

und es ist

$$(Ay - Bx)\sin i = Ar[\sin\Omega\cos(w+v) + \cos\Omega\sin(w+v)\cos i]\sin i$$
$$- Br[\cos\Omega\cos(w+v) - \sin\Omega\sin(w+v)\cos i]\sin i$$
$$-(Az - Cx)\cos i = -Ar\sin(w+v)\sin i\cos\Omega\cos i$$
$$+ Cr[\cos\Omega\cos(w+v) - \sin\Omega\sin(w+v)\cos i]\cos\Omega\cos i$$
$$-(Bz - Cy)\sin\Omega\cos i = -Br\sin(w+v)\sin i\sin\Omega\cos i$$
$$+ Cr[\sin\Omega\cos(w+v) + \cos\Omega\sin(w+v)\cos i]\sin\Omega\cos i$$

wovon die Summe

$$= Ar\sin\Omega\cos(w+v)\sin i - Br\cos\Omega\cos(w+v)\sin i + Cr\cos(w+v)\cos i$$

$= rC'\cos(w+v)$ nach Gleichung (67),

daher

$$o = \frac{r^2 d(w+v)}{dt}.\frac{di}{dt} + rC'\cos(w+v).k^2 \ldots (65^*)$$

Bei der Gleichung (66) ist nach (50) und dem Vorhergehenden

$$-(Ay - Bx)\sin c\sin\gamma = o$$
$$+(Az - Cx)\sin b\sin\beta = (Az - Cx)\sin\Omega$$
$$= Ar\sin(w+v)\sin i\sin\Omega$$
$$- Cr\cos\Omega\cos(w+v)\sin\Omega + Cr\sin\Omega^2\sin(w+v)\cos i$$
$$-(Bz - Cy)\sin a\sin\alpha = -(Bz - Cy)\cos\Omega$$
$$= -Br\sin(w+v)\sin i\cos\Omega$$
$$+ Cr\sin\Omega\cos(w+v)\cos\Omega + Cr\cos\Omega^2\sin(w+v)\cos i$$

und die Summe

$=Ar\sin(w+v)\sin i\sin\Omega - Br\sin(w+v)\sin i\cos\Omega + Cr\sin(w+v)\cos i$

$=C'r\sin(w+v)$ nach Gleichung (67).

Damit wird also die Gleichung (66) umgewandelt in

$$o=\frac{r^2 d(w+v)}{dt}\ .\ \frac{d\Omega}{dt}.\sin i + rk^2 C'\sin(w+v)\ldots(66^*)$$

§. 20.

Es müssen nun noch die Differentiale der Polarcoordinaten r und v aus den Gleichungen entfernt werden, damit die reinen Aenderungen der Elemente durch die Störungen ausgedrückt werden.

Nach der Formel (58) ist

$$\frac{dv}{dt}=\frac{k\sqrt{p}}{r^2} \text{ oder } \frac{r^2 dv}{dt}=k\sqrt{p}$$

Setzt man $d(w+v)$ statt dv (indem w der Winkel zwischen Perihel und Knoten ist, der ebenfalls in der Bahn gezählt wird) so ist in Bezug auf die Aenderung von v

$\frac{r^2 d(w+v)}{dt}=k\sqrt{p}$. Dies in (64*) substituirt, giebt

$$\frac{d\sqrt{p}}{dt}=-r.kB'\ldots(69) \text{ oder } \frac{dp}{dt}=-2r\sqrt{p}.kB'$$

Die Substitution von $\frac{r^2 d(w+v)}{dt}=k\sqrt{p}$ in (65*) ergiebt

$$\frac{di}{dt}=-\frac{rkC'\sin(w+v)}{\sqrt{p}}\ldots(70)$$

und durch dieselbe Substitution in (66*) wird

$$\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{rkC'\sin(w+v)}{\sin i\sqrt{p}}\ldots(71)$$

Aus (61*) erhält man unmittelbar für die Aenderung der halben grofsen Axe a:

$$\frac{da}{dt}==\frac{2a^2}{\sqrt{p}}\Big[eA'\sin v+B'(1+e\cos v)\Big].k\ldots(72)$$

Für die Bestimmung von de hat man

$$a(1-e^2)=p=a-ae^2$$

$$dp=da-e^2da-2aede$$

$$de=\frac{(1-e^2)da}{2ae}-\frac{dp}{2ae}=\frac{pda}{2a^2e}-\frac{\sqrt{p}d\sqrt{p}}{ae}$$

Substituirt man also die schon gefundenen Werthe von da und $d\sqrt{p}$ aus (72) und (69) so wird

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{p}}{e}\left[ekA'\sin v + kB'(1+e\cos v)\right] + \frac{rkB'\sqrt{p}}{ae};$$

und $1 + e\cos v = \frac{p}{r}$ eingesetzt nebst $a = \frac{p}{1-e^2}$, so ergiebt sich

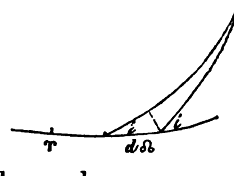
$$\frac{de}{dt} = -kA'\sin v\sqrt{p} - \frac{kB'r}{\sqrt{p}}.(e + 2\cos v + e\cos v^2)\ldots(73)$$

Die Differentialformel für die Störung der Länge des Perihels kann auch durch die Abhängigkeit der differentiellen Aenderungen der Elemente bei einem bestimmten r und v erhalten werden, indem man die bereits entwickelten Störungsformeln benutzt.

Die Gleichung $r = \frac{p}{1+e\cos v}$ enthält nur die beiden Elemente p und e. Man kann aber die Länge des Perihels π einführen, da $v = L - \pi$, wo L die Länge in der Bahn ist; dann giebt

$$p = r[1 + e\cos(L-\pi)]$$
$$dp = r\cos v\,de - r e\sin v\,dL + r e\sin v.d\pi$$

wobei L nur noch in Bezug auf das Element Ω differenzirt wird (da $d\pi$ schon berücksichtigt ist) indem L aus zwei Theilen besteht, nämlich aus Ω, auf der Ekliptik, und $L - \Omega$, auf der Ebene der Bahn gemessen, so daſs $dL = d\Omega + d(L - \Omega)$. Der letzte Theil ergiebt sich leicht aus dem sphärischen Dreiecke, welches von $d\Omega$ und dem Durchschnittspunkte zweier successiven Ebenen der veränderlichen Bahn gebildet wird, wonach $d(L - \Omega) = -\cos i\, d\Omega$ ist. Es



kann also

$$dL = d\Omega - \cos i\, d\Omega$$

in die obige Gleichung substituirt werden und man erhält damit

$$dp = r\cos v\,de - r e\sin v(1-\cos i)d\Omega + r e\sin v\,d\pi$$

oder

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{1}{re\sin v}\cdot\frac{dp}{dt} - \frac{\cos v}{e\sin v}\cdot\frac{de}{dt} + (1-\cos i).\frac{d\Omega}{dt}$$

Die Substitution aus (69), (71), (73) giebt

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{2\sqrt{p}}{e\sin v}kB' + \frac{\cos v\sqrt{p}}{e}kA' + \frac{kB'r\cos v}{e\sin v\sqrt{p}}(e + 2\cos v + e\cos v^2) - \frac{kC'r\sin(w+v)\operatorname{tg}\frac{1}{2}i}{\sqrt{p}}$$

$$=\frac{kA'\cos v\sqrt{p}}{e}-\frac{kB'r}{e\sqrt{p}}\left[\frac{2p}{r\sin v}-\frac{\cos v}{\sin v}(e+2\cos v+e\cos v^2)\right]-\frac{kC'r\sin u\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}i}{\sqrt{p}}.$$

und da der Ausdruck in [ ]

$$=\frac{2}{\sin v}-\frac{2\cos v^2}{\sin v}+e\sin v\cos v=2\sin v+e\sin v\cos v$$ ist, so wird

$$\frac{d\pi}{dt}=\frac{kA'\cos v\sqrt{p}}{e}-\frac{kB'r}{e\sqrt{p}}(2+e\cos v)\sin v-\frac{kC'.r\sin u\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}i}{\sqrt{p}}\ldots(74)$$

Will man $\frac{dw}{dt}$ statt $\frac{d\pi}{dt}$ bestimmen, so hat man $w=\pi-\Omega$, und die Gleichung (74) kann auch geschrieben werden:

$$\frac{d\pi}{dt}=\frac{kA'\cos v\sqrt{p}}{e}-\frac{kB'r}{e\sqrt{p}}(2+e\cos v)\sin v+(1-\cos i).\frac{d\Omega}{dt}$$

folglich

$$\frac{dw}{dt}=\frac{kA'\cos v\sqrt{p}}{e}-\frac{kB'r}{e\sqrt{p}}(2+e\cos v)\sin v-\cos i.\frac{d\Omega}{dt}$$

oder

$$\frac{dw}{dt}=\frac{kA'\cos v\sqrt{p}}{e}-\frac{kB'r}{e\sqrt{p}}(2+e\cos v)\sin v+\frac{rkC'\sin(w+v)}{\mathrm{tg}\,i\sqrt{p}}\ldots(75)$$

welches die Form ist, in der Bessel die Gleichung gegeben hat*).

---

*) Abhandl. über den Kometen von 1807 p. 57. Gleichung (b') (wenn man mit k multiplicirt). — Prof. Airy leitet die Formel für die Störung des Perihels dadurch ab, dafs für r einmal das Differential in Bezug auf v und dann das vollständige Differential (auch mit Bezug auf die übrigen Gröfsen) gegeben wird; die beiden Ausdrücke werden dann einander gleich gesetzt, so dafs übrig bleibt: $o=$ Differentialausdrücken, worin nur Elemente der Bahn als die veränderlichen Gröfsen bei einer bestimmten Anomalie ($L-\pi$ nach der obigen Bezeichnung) vorkommen, wobei bemerkt wird: The reasoning of this article is general for any expression in terms of the co-ordinates of the place of m (m der Comet oder der gestörte Körper); and its generel result may be stated thus: The differential coefficient of any function of the co-ordinates (including polar co-ordinates) of m, taking those parts only which depend on the elements, is equal to zero. This would not be true if the *motion* of m entered into the function; for then the differential coefficient of the function would involve second differential coefficients of the co-ordinates, which have not the same form for undisturbed and for disturbed motion. (Airy: On the calculation of the perturbations of the small planets and the comets of short period. Naut. Alm. f. 1837. Appendix p. 157). Die Formeln-Systeme, welche Bessel für die Ableitung der Gleichung $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ anführt, lassen sich nicht so in der Kürze dazu anwenden und beziehen sich wohl mit auf die Bemerkung p. 49 in Bessels Abhandl. „in den (näher bezeichneten) Gleichungen liegt die vollständigste Auflösung des Problems der drei Körper; man würde schon mit wenigeren ausreichen können, allein der Vollständigkeit halber habe ich so viele entwickelt".

§. 21.

Es fehlt jetzt nur noch die Differentialformel für die Störung der Zeit des Perihels T. Nimmt man diese Zeit als Epoche an, so ist die mittlere Anomalie M, wenn μ die mittlere tägliche siderische Bewegung bezeichnet,

$$M = \mu(t - T)$$

so daſs, wenn S die Fläche eines elliptischen Sectors bedeutet, welcher zu $t - T$ gehört, F die Fläche der ganzen Ellipse $= a\,b\,\pi$, oder da $b = \sqrt{ap}$ ist, $F = a^{\frac{3}{2}}\sqrt{p}$,

$$M = 2\pi\frac{S}{F} = \frac{2S}{ab} = \frac{2S}{a^{\frac{3}{2}}p^{\frac{1}{2}}}$$

aber es ist auch $S = \frac{1}{2}k(t - T)\sqrt{p}$ nach (27),
daher $M = \frac{k(t-T)}{a^{\frac{3}{2}}} = \mu(t - T)$, wo also $\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$ ist;

$$dM = (t - T)\,d\mu - \mu\,dT \ldots (76)$$

wenn M in Bezug auf die Aenderung der Elemente differenzirt wird. Dabei ist

$$d\mu = -\frac{k.\frac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}.da}{a^3} = -\frac{k\frac{3}{2}a^{-1}.da}{a^{\frac{3}{2}}} = -\tfrac{3}{2}\mu.\frac{da}{a} \quad \text{oder}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\tfrac{3}{2}.\frac{da}{a}$$

Für $d\,a$ ist der Werth durch die Gleichung (72) gegeben; es bleibt also noch übrig $d\,M$ zu bestimmen oder so umzuformen, daſs sich die Störungsformel für T durch das Vorhergehende ergiebt.

Man hat ferner zufolge der Gleichung (63*)

$$o = \frac{d.r\frac{dr}{dt}}{dt} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)k^2 + rA'k^2$$

Setzt man aber die störende Kraft $= o$ so wird

$$o = \frac{d.r\frac{dr}{dt}}{dt} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r}\right)k^2$$

Das Differential $\frac{d.r\frac{dr}{dt}}{dt}$ so genommen, daſs es nur den Betrag der Störung ausdrückt, ist also $-rA'k^2$.

Für $\frac{rdr}{dt}$ hat man nach (59): $\frac{rdr}{dt}=\frac{rke\sin v}{\sqrt{p}}$

also

$$\frac{d.r\frac{dr}{dt}}{dt}=-rA'k^2=d.\frac{rke\sin v}{\sqrt{p}.dt}$$

oder

$$-rkA'.dt=d.\frac{re\sin v}{\sqrt{p}}=\frac{e\sin v}{\sqrt{p}}.dr+\frac{r\sin v}{\sqrt{p}}.de+\frac{re\cos v}{\sqrt{p}}.de-\frac{re\sin v}{p}d\sqrt{p}$$

da aber $p=a(1-e^2)$ und $r=\frac{p}{1+e\cos v}$

$$dp=\frac{p}{a}da-2ae.de \qquad dr=\frac{r}{p}dp-\frac{r^2\cos v}{p}de+\frac{r^2 e\sin v}{p}dv$$

$$d\sqrt{p}=\frac{\sqrt{p}}{2a}.da-\frac{ae}{\sqrt{p}}.de \qquad \text{wo } \frac{r}{p}dp=\frac{r}{a}.da-\frac{2aer}{p}.de$$

so ist der erste Theil

$$\frac{e\sin v}{\sqrt{p}}.dr=\frac{e\sin v}{\sqrt{p}}\cdot\frac{r}{a}.da-\frac{2aer}{p}\cdot\frac{e\sin v}{\sqrt{p}}.de-\frac{e\sin v r^2\cos v}{p\sqrt{p}}.de$$
$$+\frac{r^2e^2\sin v^2}{p\sqrt{p}}.dv=\frac{re\sin v}{a\sqrt{p}}.da-\left(\frac{2rae^2\sin v}{p\sqrt{p}}+\frac{r^2e\sin v\cos v}{p\sqrt{p}}\right)de$$
$$+\frac{r^2e^2\sin v^2}{p\sqrt{p}}.dv$$

und der letzte Theil der obigen Formel ist

$$-\frac{re\sin v}{p}d\sqrt{p}=-\frac{re\sin v}{2a\sqrt{p}}.da+\frac{rae^2\sin v}{p\sqrt{p}}.de$$

Demnach wird

$$-rkA'.dt=\frac{re\sin v}{a\sqrt{p}}.da-\frac{2rae^2\sin v}{p\sqrt{p}}.de+\frac{r^2e^2\sin v^2}{p\sqrt{p}}.dv$$
$$-\frac{re\sin v}{2a\sqrt{p}}.da-\frac{r^2e\sin v\cos v}{p\sqrt{p}}.de+\frac{re\cos v}{\sqrt{p}}.dv$$
$$+\frac{rae^2\sin v}{p\sqrt{p}}.de$$
$$+\frac{r\sin v}{\sqrt{p}}.de$$

oder

$$\left.\begin{aligned}-A'k.rdt=\frac{re\sin v}{2a\sqrt{p}}.da-\frac{rae^2\sin v}{p\sqrt{p}}.de+\frac{r^2e^2\sin v^2}{p\sqrt{p}}.dv\\ -\frac{r^2e\sin v\cos v}{p\sqrt{p}}.de+\frac{re\cos v}{\sqrt{p}}.dv\\ +\frac{r\sin v}{\sqrt{p}}.de\end{aligned}\right\}\ldots(77)$$

In den Gleichungen (76) und (77) finden sich die Differentiale der mittleren Anomalie M und der wahren Anomalie v. Um die Beziehung derselben zu einander zu erhalten hat man, wenn E die excentrische Anomalie ist,

$$M = E - e \sin E$$
$$dM = dE - e \cos E . dE - \sin E . de$$

oder wenn man $e = \sin\varphi$ setzt, $de = \cos\varphi \, d\varphi$

$$dM = (1 - e\cos E) dE - \sin E \cos\varphi d\varphi \quad \ldots (78)$$

Ferner ist auch

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E \sqrt{\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}}$$

$$\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi} = \frac{1+\cos(90-\varphi)}{1-\cos(90-\varphi)} = \frac{\cos(45-\frac{1}{2}\varphi)^2}{(\sin 45-\frac{1}{2}\varphi)^2} = \operatorname{cotg}(45-\tfrac{1}{2}\varphi)^2, \text{ daher}$$

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E \operatorname{cotg}(45-\tfrac{1}{2}\varphi), \quad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v \operatorname{tg}(45-\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$d.\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}E = d.\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v + d\log\operatorname{tg}(45-\tfrac{1}{2}\varphi)$$

$$\frac{d.\operatorname{tg}\frac{1}{2}E}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}E} = \frac{d\operatorname{tg}\frac{1}{2}v}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}v} + \frac{d\operatorname{tg}(45-\frac{1}{2}\varphi)}{\operatorname{tg}(45-\frac{1}{2}\varphi)}$$

$$\frac{d.E}{\cos\frac{1}{2}E\sin\frac{1}{2}E} = \frac{dv}{\cos\frac{1}{2}v\sin\frac{1}{2}v} - \frac{d\varphi}{2\cos\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{dE}{\sin E} = \frac{dv}{\sin v} - \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \quad \ldots (79)$$

Die Gleichungen (78) und (79) geben

$$dv.\frac{\sin E}{\sin v} - d\varphi.\frac{\sin E}{\cos\varphi} = \frac{dM + \sin E\cos\varphi d\varphi}{1 - e\cos E}$$

oder

$$dM = \frac{\sin E}{\sin v}(1 - e\cos E).dv - \left[\sin E\cos\varphi + \frac{\sin E}{\cos\varphi}(1 - e\cos E)\right]d\varphi$$

und da $\sin E = \frac{r\sin v}{a\cos\varphi}$, $1 - e\cos E = \frac{r}{a}$, so wird

$$dM = \frac{r^2}{a^2\cos\varphi}.dv - \left(\frac{r\sin v}{a} + \frac{r^2\sin v}{a^2\cos\varphi^2}\right).d\varphi$$

$a\cos\varphi^2 = p$ und $r = \frac{p}{1+e\cos v}$ substituirt, giebt

$$dM = \frac{r^2}{a^2\cos\varphi}.dv - \frac{(2+e\cos v)\sin v\cos\varphi^2}{(1+e\cos v)^2}.d\varphi$$

$$dv = \frac{a^2\cos\varphi}{r^2}dM + (2+e\cos v)\sin v.\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

Da nun $e = \sin\varphi$

$$de = \cos\varphi.d\varphi, \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \frac{de}{\cos\varphi^2} = \frac{de}{1-\sin\varphi^2} = \frac{de}{1-e^2} = \frac{a}{p}.de$$

so ist

$$dv = \frac{a^2\cos\varphi}{r^2}dM + (2+e\cos v)\sin v.\frac{a}{p}.de \quad \ldots (80)$$

Substituirt man hierin den Werth von dM aus (76) so wird

$$dv=\frac{a^2\cos\varphi}{r^2}(t-T)d\mu-\frac{a^2\cos\varphi}{r^2}\mu.dT+(2+e\cos v)\sin v\frac{a}{p}.de$$

und da $d\mu=-\frac{3}{2}\frac{k.da}{a^{\frac{5}{2}}}$, $\mu=\frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$, $\cos\varphi=\sqrt{\frac{p}{a}}$

$$dv=-\frac{3}{2}\frac{k(t-T)\sqrt{p}}{r^2 a}.da-\frac{k\sqrt{p}}{r^2}.dT+\frac{(2+e\cos v)\sin v.a}{p}.de\ldots(81)$$

Führt man die beiden Factoren aus (77) ein, so ist

$$\frac{r^2e^2\sin v^2}{p\sqrt{p}}.dv=-\frac{3}{2}.\frac{k(t-T)e^2\sin v^2}{pa}.da-\frac{ke^2\sin v^2}{p}.dT$$
$$+\frac{(2+e\cos v)\sin v^3\,ae^2r^2}{p^2\sqrt{p}}.de$$

$$\frac{re\cos v}{\sqrt{p}}.dv=-\frac{3}{2}\frac{k(t-T)e\cos v}{ra}.da-\frac{ke\cos v}{r}dT+\frac{(2+e\cos v)\sin v.are\cos v}{p\sqrt{p}}.de$$

und die Formel (77) wird

$$-A'k.rdt=\frac{re\sin v}{2a\sqrt{p}}.da-\frac{rae^2\sin v}{p\sqrt{p}}.de-\frac{ke^2\sin v^2}{p}.dT$$
$$-\frac{3}{2}\frac{k(t-T)e^2\sin v^2}{pa}.da-\frac{r^2e\sin v\cos v}{p\sqrt{p}}.de-\frac{ke\cos v}{r}.dT$$
$$-\frac{3}{2}\frac{k(t-T)e\cos v}{ra}.da+\frac{re\sin v}{\sqrt{p}}.de$$
$$+\frac{(2+e\cos v)\sin v^2\,ae^2r^2}{p^2\sqrt{p}}.de$$
$$+\frac{(2+e\cos v)\sin v\cos v.aer}{p\sqrt{p}}.de$$

Um nun diese Theile zu addiren, hat man zuerst bei dT, wegen $r=\frac{p}{1+e\cos v}$ den Factor

$$-\frac{ke}{p}\Big[e\sin v^2+\cos v(1+e\cos v)\Big]=-\frac{ke}{p}(e+\cos v)$$

dann ist der Factor von da,

$$\frac{e}{2a}\left[\frac{\sin v\sqrt{p}}{1+e\cos v}-\frac{3k(t-T)e\sin v^2}{p}-\frac{3k(t-T)\cos v}{r}\right],\ \text{wenn}\ r=\frac{p}{1+e\cos v}$$

eingesetzt wird,

$$\frac{e}{2a}\left[\frac{\sin v\sqrt{p}}{1+e\cos v}-\frac{3k(t-T)}{p}(e\sin v^2+\cos v(1+e\cos v)\right]$$
$$=\frac{e}{2a}\left[\frac{\sin v\sqrt{p}}{1+e\cos v}-\frac{3k(t-T)}{p}(e+\cos v)\right].$$

Der Factor von de ist

$$\frac{a}{\sqrt{p}}\sin v\left[-\frac{re^2}{p}-\frac{r^2e\cos v}{ap}+\frac{r}{a}+\frac{(2+e\cos v)\sin v^2e^2r^2}{p^2}+\frac{(2+e\cos v)\cos v.er}{p}\right]$$

und wenn man $p = r(1 + e\cos v)$ einführt,

$$\frac{a}{\sqrt{p}}\sin v\left[-\frac{e^2}{1+e\cos v}-\frac{pe\cos v}{a(1+e\cos v)^2}+\frac{p}{a(1+e\cos v)}+\frac{e^2\sin v^2(2+e\cos v)}{(1+e\cos v)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{e\cos v(2+e\cos v)}{(1+e\cos v)^2}\right]$$

Bringt man alles auf den Nenner $(1 + e\cos v)^2$ so wird der Zähler ebenfalls $(1+e\cos v)^2$ und der Factor von de ist einfach $\frac{a}{\sqrt{p}}\sin v$.

Damit wird nun der obige Ausdruck:

$$-A'krdt = -\frac{ke}{p}(e+\cos v)\,dT + \frac{e}{2a}\left[\frac{\sin v\sqrt{p}}{1+e\cos v} - \frac{3k(t-T)}{p}(e+\cos v)\right].da$$
$$+\frac{a\sin v}{\sqrt{p}}.de$$

oder

$$\frac{dT}{dt} = \frac{da}{dt}.\frac{p}{2ka(e+\cos v)}.\left[\frac{\sin v\sqrt{p}}{1+e\cos v} - \frac{3k(t-T)}{p}(e+\cos v)\right] + \frac{de}{dt}.\frac{a\sin v\sqrt{p}}{ke(e+\cos v)}$$
$$+\frac{A'rp}{e(e+\cos v)}$$

Nach der Substitution von $\frac{da}{dt}$ und $\frac{de}{dt}$ aus §. 20, nämlich

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2a^2}{\sqrt{p}}\left[eA'k.\sin v + B'k.(1+e\cos v)\right]$$
$$\frac{de}{dt} = -A'k.\sin v\sqrt{p} - \frac{B'kr}{\sqrt{p}}(e+2\cos v+e\cos v^2)$$

wird im vorhergehenden Ausdrucke für $\frac{dT}{dt}$, erstlich die Gröſse mit dem Factor A'

$$-A'a.\left[\frac{\sqrt{p}.e\sin v}{e+\cos v}\left(\frac{\sin v\sqrt{p}}{1+e\cos v} - \frac{3k(t-T)}{p}(e+\cos v)\right) + \frac{\sin v^2 p}{e(e+\cos v)}\right.$$
$$\left.-\frac{rp}{ae(e+\cos v)}\right]$$
$$= -A'a.\left[\frac{pe\sin v^2}{(e+\cos v)(1+e\cos v)} - \frac{3e\sin v(t-T).k}{\sqrt{p}} + \frac{\sin v^2 p}{e(e+\cos v)}\right.$$
$$\left.-\frac{rp}{ae(e+\cos v)}\right]$$

Die drei Theile, welche $(t-T)$ nicht enthalten, lassen sich vereinfachen, indem man

$$r = \frac{p}{1+e\cos v},\quad \frac{p}{r} = 1+e\cos v,\quad p = a(1-e^2),\quad a = \frac{p}{1-e^2}$$

setzt, wodurch sie sich verwandeln in

$$\frac{r}{e}\left[\frac{e^2\sin v^2}{e+\cos v} + \frac{\sin v^2(1+e\cos v)}{e+\cos v} - \frac{1-e^2}{e+\cos v}\right] = \frac{r}{e}(2e - \cos v - 2e\cos v^2),$$

so dafs der Theil des Ausdrucks für $\frac{dT}{dt}$, welcher den Factor A' enthält,

$$-A'a\left[\frac{r}{e}(2e-\cos v-2e\cos v^2)-\frac{3e\sin v(t-T)k}{\sqrt{p}}\right] \text{ wird.}$$

Der andere Theil mit dem Factor B' ist zunächst

$$-B'a.\left[\frac{(1+e\cos v)\sqrt{p}}{e+\cos v}\left(\frac{\sin v\sqrt{p}}{1+e\cos v}-\frac{3k(t-T)}{p}(e+\cos v)\right)\right.$$
$$\left.+\frac{r(e+2\cos v+e\cos v^2)\sin v}{e(e+\cos v)}\right]$$
$$=-B'a.\left[\frac{\sin v.p}{e+\cos v}-\frac{3k(t-T)(1+e\cos v)}{\sqrt{p}}+\frac{r\sin v(e+2\cos v+e\cos v^2)}{e(e+\cos v)}\right]$$

wovon der erste und letzte Theil zusammen

$$\frac{r\sin v}{e(e+\cos v)}\left(\frac{pe}{r}+e+2\cos v+e\cos v^2\right) \text{ oder}$$
$$\frac{r\sin v}{e(e+\cos v)}.(2e+e^2\cos v+2\cos v+e\cos v^2)$$

und wenn man die Division mit $e+\cos v$ ausführt,

$\frac{r\sin v}{e}.(2+e\cos v)$; daher das Obige

$$=-B'a.\left[\frac{r}{e}\sin v(2+e\cos v)-\frac{3k(t-T)(1+e\cos v)}{\sqrt{p}}\right],$$

und demnach der ganze Ausdruck für $\frac{dT}{dt}$:

$$\frac{dT}{dt}=-A'a.\left[\frac{r}{e}(2e-\cos v-2e\cos v^2)-\frac{3e\sin v(t-T)k}{\sqrt{p}}\right]$$
$$-B'a.\left[\frac{r}{e}\sin v(2+e\cos v)-\frac{3k(t-T)(1+e\cos v)}{\sqrt{p}}\right]\ldots(82)$$

Zur Uebersicht und Vergleichung des Bisherigen mögen die Formeln jetzt so angeführt werden, wie sie Westphalen in den Astron. Nachr. N. 575. bei der Berechnung der Störungen des Halleyschen Cometen zusammengestellt hat, wobei nur die bisherige Bezeichnung beibehalten, und in der letzten Formel [hier (69)] das Vorzeichen — hinzugeschrieben ist, welches (l. c.) fehlt. Die Formeln sind dann folgende:

$$\frac{dT}{dt}=A'a\left[\frac{3.(t-T).k}{\sqrt{p}}.e\sin v-\frac{r}{e}(e-\cos v-e\cos v^2)\right]$$
$$+B'a\left[\frac{3(t-T).k}{\sqrt{p}}(1+e\cos v)-\frac{r}{e}(2+e\cos v)\sin v\right]$$

$$\frac{de}{dt}=-A'\sin v\sqrt{p}.k-B'r[e+\cos v(2+e\cos v)].\frac{k}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{di}{dt} = -C'r\cos(w+v) \cdot \frac{k}{\sin 1'' \sqrt{p}}$$

$$\frac{dw}{dt} = \left[A'\cos v \cdot \frac{\sqrt{p}}{e} - \frac{B'r}{e\sqrt{p}}(2+e\cos v)\sin v + \frac{C'}{\operatorname{tg} i\sqrt{p}} \cdot r\sin(w+v)\right] \cdot \frac{k}{\sin 1''}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{C'r}{\sin i\sqrt{p}} \cdot \sin(w+v) \cdot \frac{k}{\sin 1''}$$

$$\frac{d\sqrt{p}}{dt} = -rB'k$$

welche vollkommen mit dem Vorhergehenden übereinstimmen, und eben die Besselschen Formeln (Comet von 1807) sind, wenn man daselbst, die erstere theilweise, die anderen sämmtlich mit k auf der rechten Seite multiplicirt. Bessel hatte nämlich die Anziehungskraft der Sonne in der Entfernung 1 zur Krafteinheit und damit also $\frac{1}{k} = 58{,}132\,..$ Tage zur Zeiteinheit genommen (§. 11.).

§. 22.

Wegen des Factors a oder der halben grofsen Axe in dem vorhergehenden Ausdrucke für $\frac{dT}{dt}$ wird derselbe unbestimmt für eine Bahn von sehr grofser Excentricität. Man wird daher für diesen Fall den Ausdruck umformen müssen, indem man statt der Excentricität selbst, die kleine Gröfse einführt, um welche sie von der Einheit verschieden ist, und sich dabei der in §. 8. bereits gegebenen Entwickelung bedienen können; dies scheint weniger Schwierigkeiten zu bieten, als wenn man die Besselschen Entwickelungen (Comet von 1807, p. 59. ff.) durchgeht, wobei aufs Neue die excentrische Anomalie eingeführt wird.

Es sei also wieder $e = 1 - \delta$. Da nun $p = a(1 - e^2)$ und $e^2 = 1 - 2\delta + \delta^2$ oder $1 - e^2 = 2\delta - \delta^2$, so ist $p = a(2\delta - \delta^2)$ $= a\delta(2 - \delta)$.

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}.$$

Setzt man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = \tau$, so ist $\cos v = \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}$ und $\sin v = \frac{2\tau}{1+\tau^2}$

$$r = \frac{a\delta(2-\delta)}{1 + (1-\delta) \cdot \frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}}.$$

Im Falle $v = o$ ist, wird r die Periheldistanz $= q = \frac{p}{1+e}$ also

$$q = \frac{a\delta(2-\delta)}{2-\delta} = a\delta. \quad r = \frac{q(2-\delta)}{1+(1-\delta).\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}} = q(1+\tau^2).\frac{2-\delta}{2-\delta(1-\tau^2)}$$

oder

$$r = q(1+\tau^2).\frac{1-\frac{1}{2}\delta}{1-\frac{1}{2}\delta(1-\tau^2)} \text{ und } \frac{r}{e} = \frac{q(1+\tau^2)}{1-\delta} \cdot \frac{1-\frac{1}{2}\delta}{1-\frac{1}{2}\delta(1-\tau^2)}$$

$$\frac{r}{e} = \frac{q(1+\tau^2)}{1-\delta}.\left[1-\tfrac{1}{2}\delta\tau^2-\tfrac{1}{4}\delta^2\tau^2(1-\tau^2)-\tfrac{1}{8}\delta^3\tau^2(1-\tau^2)^2-\ldots\right]$$

$$2e-\cos v - e\cos v^2 = 2-2\delta-\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}-(1-\delta)\cdot\left(\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{1+\tau^2}\left[2(1-\delta)(1+\tau^2)-(1-\tau^2)-(1-\delta)\cdot\frac{(1-\tau^2)^2}{1+\tau^2}\right]$$

$$\frac{r}{e}(2e-\cos v-e\cos v^2) = \frac{q}{1-\delta}\left[2(1-\delta)(1+\tau^2)-(1-\tau^2)-(1-\delta)\cdot\frac{(1-\tau^2)^2}{1+\tau^2}\right]$$
$$\times\left[1-\tfrac{1}{2}\delta\tau^2-\tfrac{1}{4}\delta^2\tau^2(1-\tau^2)-\tfrac{1}{8}\delta^3\tau^2(1-\tau^2)^2-\ldots\right]$$

$$a.\frac{r}{e}(2e-\cos v-e\cos v^2) = \frac{q^2}{(1+\tau^2)\delta}\left[2(1+\tau^2)^2-\frac{1-\tau^4}{1-\delta}-(1-\tau^2)^2\right]\times\left[\;\right]$$

$$= \frac{q^2}{1+\tau^2}\left[\frac{\sigma\tau^2+2\tau^4}{\delta}-(1-\tau^4)-(1-\tau^4)\delta-(1-\tau^4)\delta^2-(1-\tau^4)\delta^3-\ldots\right]\times\left[\;\right]$$

Führt man die Multiplication aus und ordnet nach den Potenzen von δ, so wird

$$a.\frac{r}{e}(2e-\cos v-e\cos v^2) = \frac{q}{1+\tau^2}\cdot\left(\frac{6\tau^2+2\tau^4}{\delta}-1-2\tau^4-\tau^6\right)$$
$$+\frac{q^2}{1+\tau^2}.\delta(-1+\tfrac{1}{2}\tau^2-\tfrac{1}{2}\tau^4+\tfrac{1}{2}\tau^6+\tfrac{1}{2}\tau^8)$$
$$+\frac{q^2}{1+\tau^2}.\delta^2(-1+\tfrac{3}{4}\tau^2+\tfrac{1}{2}\tau^6-\tfrac{1}{4}\tau^{10})$$
$$+ \text{ höhere Potenzen von } \delta$$

Das ist der erste Theil des Factors von A' in der Formel $\frac{dT}{dt}$. Der zweite Theil enthält die Zeit $(t-T)$; dafür kann man den Werth aus Gleichung (31) setzen, nämlich

$$t-T = \frac{q^{\frac{3}{2}}2^{\frac{1}{2}}}{k}\Big(\tau+\tfrac{1}{3}\tau^3+\delta(\tfrac{1}{4}\tau-\tfrac{1}{4}\tau^3-\tfrac{1}{5}\tau^5)$$
$$+\delta^2(\tfrac{3}{32}\tau-\tfrac{7}{32}\tau^3+\tfrac{3}{128}\tau^7)$$
$$+\delta^3(\tfrac{5}{128}\tau-\tfrac{55}{384}\tau^3+\tfrac{3}{32}\tau^5+\tfrac{1}{16}\tau^7-\tfrac{1}{18}\tau^9)\ldots\Big)$$

Nun ist nach dem Vorhergehenden

$$-\frac{3e\sin v(t-T)a.k}{\sqrt{p}}=\frac{-3(1-\delta).k}{\sqrt{a\delta(2-\delta)}}\cdot\frac{2\tau}{1+\tau^2}\cdot(t-T).a$$

$$=\frac{-6(1-\delta)\tau(t-T)a^{\frac{1}{2}}.k}{\delta^{\frac{1}{2}}(2-\delta)^{\frac{1}{2}}(1+\tau^2)}$$ und wenn man wieder $a=\frac{q}{\delta}$ setzt,

$$=\frac{-6(1-\delta)\tau q^{\frac{1}{2}}(t-T).k}{\delta(2-\delta)^{\frac{1}{2}}(1+\tau^2)},$$ so daſs durch Substitution von $t-T$:

$$\frac{-3e\sin v(t-T)a.k}{\sqrt{p}}=\frac{-6(1-\delta)\tau.q^2}{\delta(1+\tau^2)}\cdot\left(\frac{2}{2-\delta}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\tau+\tfrac{1}{3}\tau^3+\delta(\tfrac{1}{4}\tau-\tfrac{1}{4}\tau^3-\tfrac{1}{5}\tau^5)+\ldots\right)$$

Entwickelt man den Factor

$$\left(\frac{2}{2-\delta}\right)^{\frac{1}{2}}=(1-\tfrac{1}{2}\delta)^{-\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{4}\delta+\tfrac{3}{32}\delta^2\ldots,$$

multiplicirt damit $\tau+\frac{1}{3}\tau^3+\delta(\frac{1}{4}\tau-\frac{1}{4}\tau^3-\frac{1}{5}\tau^5)+\ldots\ldots$
und dividirt durch δ, so erhält man

$$\frac{\tau+\frac{1}{3}\tau^3}{\delta}+\tfrac{1}{2}\tau-\tfrac{1}{6}\tau^3-\tfrac{1}{5}\tau^5+\delta(\tfrac{1}{4}\tau-\tfrac{1}{4}\tau^3-\tfrac{1}{10}\tau^5+\tfrac{3}{28}\tau^7)$$
$$+\delta^2(\tfrac{1}{8}\tau-\tfrac{5}{24}\tau^3+\tfrac{3}{40}\tau^5+\tfrac{5}{56}\tau^7-\tfrac{1}{18}\tau^9)$$

Dies mit 6 $(1-\delta)$ multiplicirt, so wird das Resultat:

$$\frac{-3e\sin v(t-T)a}{\sqrt{p}}=\frac{q^2}{1+\tau^2}\cdot\Big(-\frac{6\tau^2+2\tau^4}{\delta}+3\tau^2+3\tau^4+\tfrac{6}{5}\tau^6$$
$$+\delta(\tfrac{3}{2}\tau^2+\tfrac{1}{2}\tau^4-\tfrac{9}{10}\tau^6-\tfrac{9}{14}\tau^8)$$
$$+\delta^2(\tfrac{3}{4}\tau^2-\tfrac{1}{4}\tau^4-\tfrac{3}{4}\tau^6+\tfrac{3}{28}\tau^8+\tfrac{1}{3}\tau^{10})\Big)$$

für den zweiten Theil des Factors von $-A'$. Vergleicht man dies mit dem ersten Theile, so fällt bei der Addition das erste Glied mit dem Nenner δ weg und die Summe der beiden Theile wird

$$-A'a.\left[\frac{r}{e}(2e-\cos v-2e\cos v^2)-\frac{3e\sin v(t-T).k}{\sqrt{p}}\right]$$

$$=-\frac{A'.q^2}{1+\tau^2}\Big(-1+3\tau^2+\tau^4+\tfrac{1}{5}\tau^6+\delta(-1+2\tau^2-\tfrac{2}{5}\tau^6-\tfrac{1}{7}\tau^8)$$
$$+\delta^2(-1+\tfrac{3}{2}\tau^2-\tfrac{1}{4}\tau^4-\tfrac{1}{4}\tau^6+\tfrac{3}{28}\tau^8+\tfrac{1}{12}\tau^{10})\Big)$$

Auf dieselbe Art läſst sich die mit $-B'$ zu multiplicirende Gröſse entwickeln. Der erste Theil derselben war

$\frac{ra}{e}\sin v(2+e\cos v)$. Dabei ist nach dem Vorhergehenden wieder

$$a=\frac{q}{\delta}$$

$$\frac{r}{e}=\frac{q(1+\tau^2)}{1-\delta}\Big(1-\tfrac{1}{2}\delta\tau^2-\tfrac{1}{4}\delta^2\tau^2(1-\tau^2)-\tfrac{1}{8}\delta^3\tau^2(1-\tau^2)^2\Big)$$

$$\sin v=\frac{2\tau}{1+\tau^2} \text{ und } \cos v=\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \text{ folglich}$$

$$\frac{ra}{e}\sin v(2+e\cos v)=\frac{r}{e}\cdot\frac{q}{\delta(1-\delta)}\cdot\frac{2\tau}{1+\tau^2}\Big[2+(1-\delta)\cdot\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\Big]$$

Setzt man für $\frac{r}{e}$ den obigen Werth und $\frac{1}{1-\delta}=1+\delta+\delta^2\ldots$ so wird

$$\frac{ra}{e}\sin v(2+e\cos v)=\frac{q^2}{1+\tau^2}\cdot\frac{6\tau+2\tau^3-\delta(1-\tau^2)2\tau}{\delta}.(1+\delta+\delta^2\ldots)$$
$$\times\Big(1-\tfrac{1}{2}\delta\tau^2-\tfrac{1}{4}\delta^2\tau^2(1-\tau^2)-\tfrac{1}{8}\delta^3\tau^2(1-\tau^2)^2\ldots\Big)$$

Das Product aus den beiden letzten Factoren, dividirt durch δ, ist

$$\frac{1}{\delta}+1-\tfrac{1}{2}\tau^2+\delta(1-\tfrac{3}{4}\tau^2+\tfrac{1}{4}\tau^4)+\delta^2(1-\tfrac{7}{8}\tau^2+\tfrac{1}{2}\tau^4-\tfrac{1}{8}\tau^6)$$

und dies multiplicirt mit $6\tau+2\tau^3-\delta(1-\tau^2)2\tau$ giebt

$$\frac{6\tau+2\tau^3}{\delta}+4\tau+\tau^3-\tau^5+\delta(4\tau+\tfrac{1}{2}\tau^3-\tau^5+\tfrac{1}{2}\tau^7)$$
$$+\delta^2(4\tau+\tfrac{1}{4}\tau^3-\tfrac{3}{4}\tau^5+\tfrac{3}{4}\tau^7-\tfrac{1}{4}\tau^9)$$

daher ist der erste Theil mit dem Factor $-B'$ oder

$$\frac{ra}{e}\sin v(2+e\cos v)=\frac{q^2}{1+\tau^2}\Big(\frac{6\tau+2\tau^3}{\delta}+4\tau+\tau^3-\tau^5+\delta(4\tau+\tfrac{1}{2}\tau^3-\tau^5+\tfrac{1}{2}\tau^7)$$
$$+\delta^2(4\tau+\tfrac{1}{4}\tau^3-\tfrac{3}{4}\tau^5+\tfrac{3}{4}\tau^7-\tfrac{1}{4}\tau^9)\Big)$$

Der andere Theil, welcher die Zeit $(t-T)$ enthält, ist wegen

$$a=\frac{q}{\delta} \text{ und } \sqrt{p}=a^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}(2-\delta)^{\frac{1}{2}},$$

$$-\frac{3a(1+e\cos v)}{\sqrt{p}}.(t-T)k=\frac{-3q\Big[1+(1-\delta).\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}\Big]}{\delta a^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}(2-\delta)^{\frac{1}{2}}}.(t-T)k$$

Substituirt man den Werth von $(t-T)$, wie vorhin, nämlich

$$t-T=\frac{q^{\frac{3}{2}}2^{\frac{1}{2}}}{k}\Big(\tau+\tfrac{1}{3}\tau^3+\delta(\tfrac{1}{4}\tau-\tfrac{1}{4}\tau^3-\tfrac{1}{5}\tau^5)$$
$$+\delta^2(\tfrac{3}{32}\tau-\tfrac{7}{32}\tau^3+\tfrac{3}{28}\tau^7)$$
$$+\delta^3(\tfrac{5}{128}\tau-\tfrac{55}{384}\tau^3+\tfrac{3}{32}\tau^5+\tfrac{1}{16}\tau^7-\tfrac{1}{16}\tau^9)\Big)$$

so wird

$$-\frac{3a(1+e\cos v)}{\sqrt{p}}.(t-T)k=\frac{-3q^2[1+\tau^2+(1-\delta)(1-\tau^2)]}{\delta(1+\tau^2)}.\left(\frac{2}{2-\delta}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\ldots\right)$$

$$=\frac{q^2}{1+\tau^2}[-6-3\delta(1-\tau^2)].(1+\tfrac{1}{4}\delta+\tfrac{3}{32}\delta^2+\tfrac{5}{128}\delta^3)\times$$

$$\times\Big(\frac{\tau+\frac{1}{3}\tau^3}{\delta}+\tfrac{1}{4}\tau-\tfrac{1}{4}\tau^3-\tfrac{1}{5}\tau^5$$

$$+\delta(\tfrac{3}{32}\tau-\tfrac{7}{32}\tau^3+\tfrac{3}{28}\tau^7)$$

$$+\delta^2(\tfrac{5}{128}\tau-\tfrac{55}{384}\tau^3+\tfrac{3}{32}\tau^5+\tfrac{1}{16}\tau^7-\tfrac{1}{18}\tau^9)\Big)$$

Das Product der beiden letzten Factoren ist

$$\frac{\tau+\frac{1}{3}\tau^3}{\delta}+\tfrac{1}{2}\tau-\tfrac{1}{6}\tau^3-\tfrac{1}{5}\tau^5+\delta(\tfrac{1}{4}\tau-\tfrac{1}{4}\tau^3-\tfrac{1}{20}\tau^5+\tfrac{3}{28}\tau^7)$$

$$+\delta^2(\tfrac{1}{8}\tau-\tfrac{5}{24}\tau^3+\tfrac{3}{40}\tau^5+\tfrac{5}{56}\tau^7-\tfrac{1}{18}\tau^9)$$

und nach der Multiplication mit dem Factor $-6-3\delta(1-\tau^2)$ wird

$$-\frac{3a(1+e\cos v)}{\sqrt{p}}(t-T).k=\frac{q^2}{1+\tau^2}\Big(-\frac{6\tau+2\tau^3}{\delta}-\tau^3+\tfrac{1}{5}\tau^5$$

$$+\delta(-\tfrac{1}{2}\tau^3+\tfrac{1}{5}\tau^5-\tfrac{3}{70}\tau^7)$$

$$+\delta^2(-\tfrac{1}{4}\tau^3+\tfrac{3}{20}\tau^5-\tfrac{9}{140}\tau^7+\tfrac{1}{84}\tau^9)\Big)$$

Bei der Addition der beiden Theile fällt nun wieder die Gröſse mit dem Nenner δ weg, und man erhält die Summe

$$-B'a.\left[\frac{r}{e}\sin v(2+e\cos v)-\frac{3k(t-T)(1+e\cos v)}{\sqrt{p}}\right]=$$

$$=-\frac{B'.q^2}{1+\tau^2}\Big[4\tau-\tfrac{4}{5}\tau^5+\delta(4\tau-\tfrac{4}{5}\tau^5+\tfrac{16}{35}\tau^7)$$

$$+\delta^2(4\tau-\tfrac{3}{5}\tau^5+\tfrac{24}{35}\tau^7-\tfrac{5}{21}\tau^9)\Big]$$

Die vollständige Formel für $\frac{dT}{dt}$ heiſst daher jetzt

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{A'q^2}{1+\tau^2}.\Big[-1+3\tau^2+\tau^4+\tfrac{1}{5}\tau^6+\delta(-1+2\tau^2-\tfrac{2}{5}\tau^5-\tfrac{1}{7}\tau^8$$

$$+\delta^2(-1+\tfrac{3}{2}\tau^2-\tfrac{1}{4}\tau^4-\tfrac{1}{4}\tau^6+\tfrac{3}{28}\tau^8+\tfrac{1}{12}\tau^{10})\Big]$$

$$-\frac{B'.q^2}{1+\tau^2}.\Big[4\tau-\tfrac{4}{5}\tau^5+\delta(4\tau-\tfrac{4}{5}\tau^5+\tfrac{16}{35}\tau^7)$$

$$+\delta^2(4\tau-\tfrac{3}{5}\tau^5+\tfrac{24}{35}\tau^7-\tfrac{5}{21}\tau^9)\Big]\ldots(83)$$

Zur Vergleichung mit der Formel in Bessels Abhandl. (Comet von 1807. p. 62) multiplicire ich den vorhergehenden Ausdruck (83) mit $1=\frac{1-\frac{1}{2}\delta}{1-\frac{1}{2}\delta}$, so wird derselbe

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{A'q^2}{(1-\frac{1}{2}\delta)(1+\tau^2)} \cdot \Big[-1+3\tau^2+\tau^4+\tfrac{1}{5}\tau^6$$
$$+\delta(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau^2-\tfrac{1}{2}\tau^4-\tfrac{1}{2}\tau^6-\tfrac{1}{7}\tau^8)$$
$$+\delta^2(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\tau^2-\tfrac{1}{4}\tau^4-\tfrac{1}{20}\tau^6+\tfrac{5}{28}\tau^8+\tfrac{1}{12}\tau^{10})\Big]$$
$$-\frac{B'.q^2}{(1-\frac{1}{2}\delta).(1+\tau^2)} \cdot \Big[4\tau-\tfrac{4}{5}\tau^5+\delta(2\tau-\tfrac{2}{5}\tau^5+\tfrac{16}{35}\tau^7)$$
$$+\delta^2(2\tau-\tfrac{1}{5}\tau^5+\tfrac{16}{35}\tau^7-\tfrac{5}{21}\tau^9)\Big] \;\ldots\; (84)$$

Wenn man δ hierbei als verschwindend annehmen kann, so ist

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{A'q^2}{1+\tau^2}(-1+3\tau^2+\tau^4+\tfrac{1}{5}\tau^6) - \frac{B'.q^2}{1+\tau^2}(4\tau-\tfrac{4}{5}\tau^5) \;\ldots\ldots\; (85)$$

Dieser Ausdruck weicht von dem in Bessels Abhandl. p. 62. gegebenen nicht ab, wenn nur berücksichtigt wird, dafs bei Bessel die wahre Anomalie durch $(t+T)$, hier aber durch $(t-T)$ bestimmt wurde, wodurch das Zeichen von dT sich geändert hat *).

§. 23.

Die Zusammenstellung der Differentialformeln für die Berechnung der Störungen der Elemente einer Bahn von sehr grofser Excentricität wird nun nach dem Vorhergehenden:

1) für die Zeit des Perihels T:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{A'q^2}{1+\tau^2}(-1+3\tau^2+\tau^4+\tfrac{1}{5}\tau^6) - \frac{B'q^2}{1+\tau^2}(4\tau-\tfrac{4}{5}\tau^5)$$

wenn man die kleine Abweichung von der parabolischen Excentricität hierbei wegläfst. τ ist die Tangente der halben wahren Anomalie und q die Periheldistanz.

2) Die Länge des Perihels π:

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{A'k.\cos v\sqrt{p}}{e} - \frac{B'k.r}{e\sqrt{p}}(2+e\cos v)\sin v - \frac{C'k.r\sin u\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}i}{\sqrt{p}}$$

---

*) Die Formel (84) ist dagegen nicht ganz übereinstimmend mit der Formel (d') in Bessels Abhandl. (Comet von 1807 p. 62.), welche wie folgt zu berichtigen ist: p. 62, Zeile 11; statt $+\frac{1}{4}t^4$ lese man $-\frac{1}{4}t^4$; Zeile 12, statt t im Factor von δ, ist $2t$ zu lesen; Zeile 13, statt t im Factor von δ^2, ist ebenfalls $2t$ lesen. Nach diesen Berichtigungeu, die ich der gütigen Mittheilung des Herrn Dr. Brünnow verdanke, welcher die Formel anders abgeleitet hatte als es oben geschehen ist, stimmen die Resultate überein.

wo u das Argument der Breite ist, welches vorher mit $w+v$ bezeichnet wurde, p der halbe Parameter, r der rad. vect.

3) Die Länge des aufsteigenden Knotens:

$$\frac{d\Omega}{dt}=-\frac{C'k.r\sin u}{\sin i\sqrt{p}}$$

4) Die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik i:

$$\frac{di}{dt}=-\frac{C'k.r\cos u}{\sqrt{p}}$$

5) Die Periheldistanz q:

Aus der Formel $\frac{dp}{dt}=-B'k.2r\sqrt{p}$ ergiebt sich, da $r=\frac{p}{1+e\cos v}$, also wenn $v=o$ ist, $r=q=\frac{p}{1+e}$ oder $p=q(1+e)$, $dp=(1+e)dq+q.de$, $dq=\frac{q}{p}.dp-\frac{q^2}{p}.de$, oder $dq=\frac{dp}{1+e}-\frac{q}{1+e}.de$ und wenn $e=1$ gesetzt wird, $dq=\frac{1}{2}dp-\frac{1}{2}q.de$

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{B'k.2r\sqrt{p}}{1+e}-\frac{q}{1+e}\cdot\frac{de}{dt}$$

$$=-B'k.r\sqrt{p}-\tfrac{1}{2}q.\frac{de}{dt}$$

6) Die Excentricität e:

$$\frac{de}{dt}=-A'k\sin v\sqrt{p}-\frac{B'kr}{\sqrt{p}}(e+2\cos v+e\cos v^2)$$

Setzt man endlich noch, nach der Bezeichnung in Prof. Encke's Abhandl. über die Berechnung der speciellen Störungen (Berl. Astron. Jahrb. f. 1837 p. 330):

$$-A'=R_0$$
$$-B'=S_0$$
$$-C'=W_0$$

so nehmen die vorhergehenden Ausdrücke nach einigen sehr leichten Umformungen die für die Rechnung bequeme Gestalt an:

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\sqrt{p}}{k}\cdot\frac{q^2}{1+\tau^2}(-1+3\tau^2+\tau^4+\tfrac{1}{5}\tau^6)\cdot\frac{kR_0}{\sqrt{p}}+\frac{\sqrt{p}}{k}\cdot\frac{q^2}{1+\tau^2}(4\tau-\tfrac{4}{5}\tau^5)\cdot\frac{kS_0}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{d\pi}{dt}=-\frac{p\cos v}{e}\cdot\frac{kR_0}{\sqrt{p}}+\frac{p+r}{e}\sin v.\frac{kS_0}{\sqrt{p}}+(1-\cos i)\frac{d\Omega}{dt}$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r\sin(v+\pi-\Omega)}{\sin i}\cdot\frac{kW_0}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{di}{dt}=r\cos(v+\pi-\Omega)\cdot\frac{kW_0}{\sqrt{p}}$$

$$\frac{dq}{dt}=rp.\frac{kS_0}{\sqrt{p}}-\tfrac{1}{2}q.\frac{de}{dt}$$

$$\frac{de}{dt} = p \sin v \,.\, \frac{kR_0}{\sqrt{p}} + r(e + 2\cos v + e\cos v^2) \,.\, \frac{kS_0}{\sqrt{p}}$$

$$= p \sin v \,.\, \frac{kR_0}{\sqrt{p}} + \frac{p^2}{r} \,.\, \frac{kS_0}{\sqrt{p}}$$

wo zuletzt, wie bei dT und dq die parabolische Excentricität eingeführt ist. Die übrigen, $d\pi$, $d☊$, di, sind ganz übereinstimmend mit der Ellipse und man hat darin nur $e = 1$ zu setzen für die Parabel. Wenn k in Secunden ausgedrückt ist, bei der Berechnung von $\frac{kR_0}{\sqrt{p}}$, $\frac{kS_0}{\sqrt{p}}$, $\frac{kW_0}{\sqrt{p}}$, so sind de und dq also wieder mit 206265 zu dividiren.

§. 24.

Sind nun nach den vorhergehenden Differentialformeln die täglichen Aenderungen der Bahnelemente durch die Störungen für gewisse Zeitpunkte gefunden worden, wie z. B. nach Bessel's Rechnung bei dem Cometen von 1807, die tägliche Störung der Zeit des Perihels:

	$\frac{dT}{dt}$
1807 Sept. 22	— 0,00000320 Tage
Oct. 22	+ 0,00000994
Nov. 21	+ 0,00001693
Dec. 21	+ 0,00002210
1808 Jan. 20	+ 0,00002509
Febr. 19	+ 0,00003004
Mrz. 20	+ 0,00004501

so ist noch die Aufgabe zu lösen, aus solchen gegebenen Werthen den Betrag der Störungen für einen innerhalb liegenden Zeitraum zu summiren z. B. von Sept. 22. bis Sept. 28.

Man betrachte die Zeitintervalle als Abscissen (x) und die berechneten Werthe als Ordinaten (y) einer Curve, also hier in Einheiten der 6ten Decimale:

x . . . 0 30 60 u. s. w.
y . . . 3,20 9,94 16,93

Die gesuchte Gröſse ist demnach gleich der Summe aller y, von $x = o$ bis $x = 8$ d. i. von Tag zu Tag die tägliche Störung genommen, oder genauer von halben zu halben Tagen den ent-

5*

sprechenden Betrag u. s. w.; daher, wenn F diese gesuchte Gröfse ist, so hat man $F = \int y\,dx$, wo das Integral zwischen den gegebenen Grenzen zu nehmen ist, und somit die Fläche einer Curve darstellt zwischen gegebenen Werthen der Ordinaten, dem Bogen der Curve und der Abscissenaxe. Um für einen Werth von x den dazu gehörigen Werth von y zu finden, bedient man sich hier der Interpolationsrechnung.

Setzt man, da y eine Function von x ist,

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots \quad (1)$$

wo die Coefficienten a, b, c, d aus den gegebenen Werthen zu bestimmen sind, so wird man wenigstens die unvermeidliche Voraussetzung über die Form dieser Function und damit die Rechnung so einfach als möglich gemacht haben, indem man die unbekannte Curve in Hinsicht ihrer Gleichung zu den einfachsten Curven zählt, die es giebt, und die man parabolische Curven genannt hat, weil die obige Gleichung der gewöhnlichen Parabel angehört, wenn man sich auf die drei ersten Glieder beschränkt.

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit dx und integrirt, so wird

$$F = \int y\,dx = ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 + \tfrac{1}{4}dx^4 + \ldots \quad (2)$$

Nimmt man zur Bestimmung von a, b, c, d die Werthe $x = o$, $x = 30$ u. s. w. nebst den entsprechenden Werthen von y und substituirt diese in die Gleichung (1) so erhält man die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} -\ 3{,}20 &= a \\ +\ 9{,}94 &= a + b.30 + c.30^2 + d.30^3 \\ +16{,}93 &= a + b.60 + c.60^2 + d.60^3 \\ +22{,}10 &= a + b.90 + c.90^2 + d.90^3 \end{aligned}$$

woraus sich ergiebt

$$\begin{aligned} a &= -3{,}20 \\ \log b &= \ \ 9{,}76983 \\ \log c &= \ \ 7{,}76509\,\mathrm{n} \\ \log d &= \ \ 5{,}42697 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F = \int_0^8 y\,dx &= 8a + \tfrac{1}{2}b.8^2 + \tfrac{1}{3}c.8^3 + \tfrac{1}{4}d.8^4 \\ &= -25{,}60 + 18{,}836 - 0{,}994 + 0{,}027 \\ &= -7{,}731 \end{aligned}$$

Für Sept. 22 soll $T = 18{,}73709$ sein, also für Sept. 28 wird $T = 18{,}737097{,}7$ wenn man das Vorzeichen in dem von Bessel angenommenen Sinne gebraucht.

Beschränkt man sich bloſs auf die drei ersten Ordinaten, so wird

$$a = -3{,}20, \quad b = +0{,}5405, \quad c = -0{,}003417$$

also

$$F = \int_0^8 y\,dx = -3{,}20 . 8 + \tfrac{1}{2} . 0{,}5405 . 8^2 - \tfrac{1}{3} . 0{,}003417 . 8^3$$
$$= -8{,}9$$

womit $T = 18{,}737098{,}9$ für den 28. Sept. ist.

Da hier x nur $= 8$ ist, so erhält man schon durch die beiden ersten Ordinaten das Gesuchte sehr nahe; es ist dann $a = -3{,}20$, $b = +0{,}438$ und

$$\int_0^8 y\,dx = -3{,}20 . 8 + \tfrac{1}{2}\, b . 8^2$$
$$= -25{,}60 + 14{,}016$$
$$= -11{,}584$$

folglich für Sept. 28: $T = 18{,}73709 + 11{,}6 = 18{,}737101{,}6$ welches mit Bessel's Angabe 18,737101 übereinstimmt.

§. 25.

Die Methode der mechanischen Quadratur, wie man dies Verfahren nennt, da es mit der genäherten Flächenbestimmung übereinkommt, ist im vorhergehenden § so dargestellt, daſs sie für ungleiche Intervalle der x ebenso wie für gleiche Intervalle angewandt werden kann.

Sucht man die ganze Fläche, welche durch die äuſsersten Ordinaten begränzt wird und sind die Intervalle der Abscissen einander gleich, so werden die Formeln sehr einfach. Es seien zuerst drei Ordinaten gegeben.

Werthe von x . . .	o	α	2α
- - y . . .	y_0	y_1	y_2

Man setze wieder $y = y_0 + b\,x + c\,x^2$, so wird

$$\int y\,dx = y_0\,x + \tfrac{1}{2} b x^2 + \tfrac{1}{3} c x^3 \text{ und } \int_0^{2\alpha} y\,dx = 2\alpha y_0 + 2\alpha^2 . b + \tfrac{8}{3}\alpha^3 . c$$

Da nun $y_1 = y_0 + b\alpha + c\alpha^2$
$y_2 = y_0 + 2\,b\alpha + 4\,c\,\alpha^2$

also $b = \frac{1}{\alpha}(-\tfrac{3}{2}y_0 + 2y_1 - \tfrac{1}{2}y_2)$

$$c = \frac{1}{\alpha^2}(\tfrac{1}{2}y_0 - y_1 + \tfrac{1}{2}y_2)$$

so ist $\int_0^{2\alpha} y\,dx = \frac{\alpha}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

Nennt man $B = 2\alpha$ die ganze Basis oder das Stück der Abscissenaxe zwischen der ersten und letzten Ordinate, so wird die gesuchte Fläche

$$F = \tfrac{1}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).B \ldots (3)$$

Wiederholt man dies Verfahren durch Verbindung der letzten Ordinate mit den beiden folgenden y_3 und y_4 so wird die Fläche von $x = o$ bis $x = 4\alpha$

$$\frac{\alpha}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \text{ für fünf Ordinaten,}$$

und ebenso weiter

$$\frac{\alpha}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) \text{ für sieben Ordinaten,}$$

oder allgemein, die nach Thomas Simpson benannte Formel für die genäherte Flächenbestimmung bei einer ungeraden Anzahl von Ordinaten; man nimmt die erste und letzte Ordinate einfach und die übrigen abwechselnd vierfach oder doppelt und multiplicirt diese Summe mit dem 3ten Theil des gemeinschaftlichen Intervalls (α) der Abscissen.

Nun seien vier Ordinaten gegeben und man suche die Fläche, welche dazwischen enthalten ist. Der Kürze wegen werde das Intervall der Abscissen $(\alpha) = 1$ genommen, also

Werthe von x . . .	0	1	2	3
- - y . . .	y_0	y_1	y_2	y_3

Die Gleichung $y = y_0 + bx + cx^2 + dx^3$ giebt für

$$x = 1 \ldots y_1 = y_0 + b + c + d$$
$$x = 2 \ldots y_2 = y_0 + 2b + 4c + 8d$$
$$x = 3 \ldots y_3 = y_0 + 3b + 9c + 27d$$

woraus man durch Elimination erhält

$$b = -\tfrac{11}{6}y_0 + 3y_1 - \tfrac{3}{2}y_2 + \tfrac{1}{3}y_3$$
$$c = y_0 - \tfrac{5}{2}y_1 + 2y_2 - \tfrac{1}{2}y_3$$
$$d = -\tfrac{1}{6}y_0 + \tfrac{1}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}y_2 + \tfrac{1}{6}y_3$$

Es ist aber

$$\int y\,dx = y_0 x + \tfrac{1}{2} b x^2 + \tfrac{1}{3} c x^3 + \tfrac{1}{4} d x^4$$

$$\int_0^3 y\,dx = 3y_0 + \tfrac{9}{2} b + 9c + \tfrac{81}{4} d$$

und wenn die gefundenen b, c, d eingesetzt werden, nebst der Einheit α,

$$\int_0^3 y\,dx = \tfrac{3}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) \, . \, \alpha,$$

oder wenn man statt des Intervalls α, die ganze Basis $B = 3\alpha$, einführt, so wird die ganze Fläche F bei vier Ordinaten:

$$F = \tfrac{1}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3) \, . \, B \;\ldots\; (4)$$

Wenn 5 Ordinaten gegeben sind, und man die Fläche genauer bestimmen will, als es bei der Zusammensetzung von je drei Ordinaten nach der Simpsonschen Regel geschieht, so hat man wieder für die gegebenen

Werthe von x . . . 0 1 2 3 4
" " y . . . y_0 y_1 y_2 y_3 y_4

zu setzen

$$y = y_0 + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

also

$$y_1 = y_0 + b + c + d + e$$
$$y_2 = y_0 + 2b + 4c + 8d + 16e$$
$$y_3 = y_0 + 3b + 9c + 27d + 81e$$
$$y_4 = y_0 + 4b + 16c + 64d + 256e$$

Damit wird

$$b = -\tfrac{25}{12} y_0 + 4y_1 - 3y_2 + \tfrac{4}{3} y_3 - \tfrac{1}{4} y_4$$
$$c = \tfrac{35}{24} y_0 - \tfrac{13}{3} y_1 + \tfrac{19}{4} y_2 - \tfrac{7}{3} y_3 + \tfrac{11}{24} y_4$$
$$d = -\tfrac{5}{12} y_0 + \tfrac{3}{2} y_1 - 2y_2 + \tfrac{7}{6} y_3 - \tfrac{1}{4} y_4$$
$$e = \tfrac{1}{24} y_0 - \tfrac{1}{6} y_1 + \tfrac{1}{4} y_2 - \tfrac{1}{6} y_3 + \tfrac{1}{24} y_4$$
$$\int y\,dx = y_0 x + \tfrac{1}{2} b x^2 + \tfrac{1}{3} c x^3 + \tfrac{1}{4} d x^4 + \tfrac{1}{5} e x^5$$
$$\int_0^4 y\,dx = 4y_0 + 8b + \tfrac{64}{3} c + 64d + \tfrac{1024}{5} e$$

$$\begin{aligned}
&= 4y_0 \\
&- \tfrac{50}{3} y_0 + 32y_1 - 24y_2 + \tfrac{32}{3} y_3 - 2y_4 \\
&+ 31\tfrac{1}{9} y_0 - 92\tfrac{4}{9} y_1 + 101\tfrac{1}{3} y_2 - 49\tfrac{7}{9} y_3 + 9\tfrac{7}{9} y_4 \\
&- 26\tfrac{2}{3} y_0 + 96y_1 - 128y_2 + 74\tfrac{2}{3} y_3 - 16y_4 \\
&+ 8\tfrac{8}{15} y_0 - 34\tfrac{2}{15} y_1 + 51\tfrac{1}{5} y_2 - 34\tfrac{2}{15} y_3 + 8\tfrac{8}{15} y_4 \\
\hline
&= \tfrac{14}{45} y_0 + \tfrac{64}{45} y_1 + \tfrac{24}{45} y_2 + \tfrac{64}{45} y_3 + \tfrac{14}{45} y_4
\end{aligned}$$

oder

$$\int_0^4 y\,dx = \tfrac{2}{45}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4) \, . \, \alpha$$

wenn man α in der frühern Bedeutung, als gleiche Differenz der

auf einander folgenden Abscissen einführt. Ist wieder $B = 4\alpha$ die ganze Basis so wird die Fläche

$$F = \tfrac{1}{90}(7y_0 + 32y_1 + 12y_2 + 32y_3 + 7y_4).B \;.\;.\;.\; (5)$$

Dieser Formeln bediente sich schon Clairaut, als zum ersten Male die Störungen eines Cometen, des Halleyschen nämlich, berechnet wurden. (M. s. a. Cousin Introd. à l'étude de l'astronomie physique. Paris 1787. p. 288). Auch Bessel gebrauchte dieselben Formeln für 3, 4 bis 5 Ordinaten bei der Summation der Störungen des Olberschen Cometen, und nennt sie nach der Anzahl der Flächenstreifen, die 2te, 3te und 4te Cotesische Formel. (Abh. der Akad. d. W. f. 1812—13.)

Von Roger Cotes und Newton zuerst entwickelt, findet man diese Formeln noch weiter bis zu 11 Ordinaten fortgesetzt in dem von R. Smith herausgegebenen Nachlasse: Harmonia mensurarum etc. Per Roger Cotesium, Cantabrigiae 1722. Hier werden in dem Abschnitte: De methodo differentiali Newtoniana p. 33. die Ausdrücke für die Flächen folgendermaſsen angegeben, wobei die Summe der ersten und letzten Ordinate mit A, die Summe der zweiten und vorletzten mit B, die folgende Summe mit C u. s. w. bezeichnet ist. Bei einer ungeraden Anzahl der Ordinaten hat man zuletzt die eine mittlere, bei einer geraden Anzahl die Summe der beiden mittleren Ordinaten. R bezeichnet den Abstand der äuſsersten Ordinaten von einander.

Anzahl der Ordinaten	Fläche
3	$\frac{A+4B}{6}.R$
4	$\frac{A+3B}{8}.R$
5	$\frac{7A+32B+12C}{90}.R$
6	$\frac{19A+75B+50C}{288}.R$
7	$\frac{41A+216B+27C+272D}{840}.R$

u. s. w. bis zu 11 Ordinaten, wo die letzten Zahlen sehr groſs

werden, so daſs man die Zusammenfassung von kleineren Abtheilungen vorzieht.

§. 26.

Da die Curve, welche hier betrachtet wird, nur dadurch bestimmt ist, daſs sie durch eine Anzahl gegebener Punkte gehen soll, so fällt diese Bestimmung bei den Endpunkten, wo die weitere Anknüpfung fehlt, am unsichersten aus. Durch eine zweckmäſsige Wahl der Grenzen, zwischen welchen man integrirt, wird sich also ein Theil der Fläche schärfer bestimmen lassen. Führt man dabei die Differenzen der Ordinaten ein, so gelangt man zu einer sehr einfachen Formel, welche auch für die praktische Anwendung als die zweckmäſsigste empfohlen worden ist.

Es seien zuerst drei Werthe gegeben und die Differenzen der Ordinaten beigefügt, als

$$\begin{array}{llll} x=-1 \ldots y_0 & & & \\ & \Delta y_0 & & \\ x=\;\;0 \ldots y_1 & & \Delta y_2 & \\ & \Delta y_1 & & \\ x=+1 \ldots y_2 & & & \end{array}$$

Man nehme an, wie vorher, daſs y dargestellt werde durch

$$y=y_1+bx+cx^2$$

indem man jetzt von der Mitte ausgeht.

Man hat für $x=-1 \ldots y_0=y_1-b+c=y_1-\Delta y_0$
$\qquad\qquad x=+1 \qquad y_2=y_1+b+c=y_2+\Delta y_1$

folglich $b=\frac{\Delta y_0+\Delta y_1}{2}$ und $c=\frac{\Delta y_1-\Delta y_0}{2}=\frac{1}{2}\Delta^2 y_0$

Der Ausdruck für y wird nach dieser Substitution,

$$y=y_1+\tfrac{1}{2}(\Delta y_0+\Delta y_1)x+\tfrac{1}{2}\Delta^2 y_0 . x^2$$

$$\int y\,dx=y_1 x+\tfrac{1}{4}(\Delta y_0+\Delta y_1)x^2+\tfrac{1}{6}\Delta^2 y_0 . x^3$$

$$\int_0^{+\frac{1}{2}} y\,dx=\tfrac{1}{2}y_1+\tfrac{1}{16}(\Delta y_0+\Delta y_1)+\tfrac{1}{48}\Delta^2 y_0$$

$$\int_0^{-\frac{1}{2}} y\,dx=-\tfrac{1}{2}y_1+\tfrac{1}{16}(\Delta y_0+\Delta y_1)-\tfrac{1}{48}\Delta^2 y_0$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y\,dx=y\;+\tfrac{1}{24}\Delta^2 y_0 \;\ldots\ldots\; (6)$$

In dem obigen Beispiele für $y_1=9{,}94$, $\Delta^2 y_0=-6{,}15$ wird hiernach der Betrag der Störungen während der 30 Tage von Oct. 7 bis Nov. $6=30(y^1+\frac{1}{24}\Delta^2 y_0)=290{,}5125$.

Sehr leicht wird nun die Summation einer solchen Reihe, wie in demselben Beispiele von Oct. 7 bis März 5, indem man nur die Summe der berechneten Werthe von y zu nehmen hat (mit Ausschluſs der äuſsersten) und dazu $\frac{1}{24}$ der ihnen gegenüberliegenden 2ten Differenzen addirt, oder, welches dasselbe und noch leichter ist, $\frac{1}{24}$ des Ueberschusses der letzten von den ersten Differenzen über die erste von den ersten Differenzen.

Um also während eines beliebigen Zeitraums die Störungen zu berechnen, theile man diesen Zeitraum in gleiche Intervalle, berechne für die Mitte eines jeden Intervalls den Werth von y und bilde die Differenzen. Dehnt man diese Rechnung noch auf ein Intervall vor und nach dem gegebenen Zeitraume aus, so erhält man auch zu dem ersten und letzten Werthe von y die gegenüberliegenden 2ten Differenzen; andernfalls werden sich diese durch eine Schätzung ermitteln lassen. Die Summe aller y nebst $\frac{1}{24}$ des Ueberschusses, wie oben genommen, ist dann die gesuchte Summe.

Hierbei werden die 3ten Differenzen, wenn sie merklich sind, sich eben so gegeneinander aufheben, wie die ersten Differenzen und man wird nur den Einfluſs der 4ten Differenzen vernachlässigt haben. Nach Airy's Urtheil (Naut. Alm. f. 1837 p. 167) kann man diese 4ten Differenzen vernachlässigen, wenn die Intervalle nicht übermäſsig groſs genommen sind. Wünscht man sie mit zu berücksichtigen so muſs zu dem obigen Ausdrucke noch $-\frac{17}{5760}\times$ Summe aller correspondirenden 4ten Differenzen gelegt werden.

Es sei nämlich gegeben

$$\begin{array}{lllll}
x=-2\ \ldots\ y_0 & & & & \\
 & \Delta y_0 & & & \\
x=-1\ \ldots\ y_1 & & \Delta^2 y_0 & & \\
 & \Delta y_1 & & \Delta^3 y_0 & \\
x+\ 0\ \ldots\ y_2 & & \Delta^2 y_1 & & \Delta^4 y_0 \\
 & \Delta y_2 & & \Delta^3 y_1 & \\
x=+1\ \ldots\ y_3 & & \Delta^2 y_2 & & \\
 & \Delta y_3 & & & \\
x=+2\ \ldots\ y_4 & & & &
\end{array}$$

so ist wieder $y=y_2+bx+cx^2+dx^3+ex^4$

also
$$\begin{aligned}
y_0&=y_2-2b+4c-8d+16e=y_2-\Delta y_1-\Delta y_0\\
y_1&=y_2-b\ +c\ -d\ +e\ \ =y_2-\Delta y_1\\
y_3&=y_2+b\ +c\ +d\ +e\ \ =y_2+\Delta y_2\\
y_4&=y_2+2b+4c+8d+16e=y_2+\Delta y_2+\Delta y_3
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$b=\tfrac{1}{2}(\Delta y_1+\Delta y_2)-\tfrac{1}{12}(\Delta_3 y_0+\Delta_3 y_1)$$
$$c=\tfrac{1}{2}\Delta^2 y_1-\tfrac{1}{24}\Delta^4 y_0$$
$$d=\tfrac{1}{12}(\Delta^3 y_0+\Delta^3 y_1)$$
$$e=\tfrac{1}{24}\Delta^4 y_0$$

und nachdem man dies substituirt und integrirt hat,

$$\int y\,dx=y_2 x+\tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(\Delta y_1+\Delta y_2)-\tfrac{1}{12}(\Delta^3 y_0+\Delta^3 y_1)]x^2+\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}\Delta^2 y_1-\tfrac{1}{24}\Delta^4 y_0)x^3$$
$$+\tfrac{1}{48}(\Delta^3 y_0+\Delta^3 y_1)x^4+\tfrac{1}{120}\Delta^4 y_0 . x^5$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} y\,dx=\tfrac{1}{2}y_2+\tfrac{1}{8}[\tfrac{1}{2}(\Delta y_1+\Delta y_2)-\tfrac{1}{12}(\Delta^3 y_0+\Delta^3 y_1)]+\tfrac{1}{24}(\tfrac{1}{2}\Delta^2 y_1-\tfrac{1}{24}\Delta^4 y_0)$$
$$+\tfrac{1}{768}(\Delta^3 y_0+\Delta^3 y_1)+\tfrac{1}{3840}\Delta^4 y_0$$

$$\int_0^{-\frac{1}{2}} y\,dx=-\tfrac{1}{2}y_2+\text{ u. s. w.}$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} y\,dx=y_2+\tfrac{1}{12}(\tfrac{1}{2}\Delta^2 y_1-\tfrac{1}{24}\Delta^4 y_0)+\tfrac{1}{1920}\Delta^4 y_0$$
$$=y_2+\tfrac{1}{24}\Delta^2 y_1-\tfrac{17}{5760}\Delta^4 y_0 \quad . \; . \; . \; (7)$$

welche Formel die obige Vorschrift enthält.

Zusätze.

Anzuführen ist noch über die Theorie des in dieser Schrift behandelten Gegenstandes, eine Abhandlung von Prof. Moebius: Variationum quas elementa motus perturbati planetarum subeunt nova et facil. evolutio. Lipsiae 1844.

In Betreff der numerischen Anwendung sehe man ferner eine Bestimmung der Bahn des zweiten Cometen von 1849 in den Astron. Nachr. No. 829 und 830.

Ueber eine seitdem bekannt gewordene neue Berechnungsart der Störungen, wonach man mit der numerischen doppelten Integration der Differentialgleichungen (41) beginnt, findet man in den Astronomischen Nachrichten Bd. 33 und ff. mehrere Auf-

sätze von Prof. Encke, Director Hansen und Dr. Brünnow. Ebendaselbst wird auch von Prof. Encke, hinsichtlich der Priorität dieser Methode, auf eine Abhandlung von G. P. Bond in den Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences, New Series Vol. IV. verwiesen, unter dem Titel: „On some Applications of the Method of Mechanical Quadratures".

In demselben Verlage sind die folgenden Werke erschienen:

LEHRBUCH
DER
SPHÄRISCHEN ASTRONOMIE

VON

Dr. BRÜNNOW.

Mit einem Vorwort

von

Prof. Dr. J. F. ENCKE.

Mit einer Tafel in Steindruck.

1851. 38 Bogen gr. 8. geh. Preis 4 Thlr.

Der Herr Verfasser sagt über seine Arbeit im Vorwort:

Die Herausgabe eines Lehrbuchs der sphärischen Astronomie bedarf wohl kaum einer Rechtfertigung, da die vorhandenen älteren Werke über diesen Theil der Astronomie, wenn auch zu ihrer Zeit zum Theil vortrefflich, nicht mehr dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft entsprechen. In neuester Zeit wurde zwar durch das Erscheinen von Sawitzsch's trefflicher „Practischer Astronomie" diese lange gefühlte Lücke in der astronomischen Literatur zum Theil ausgefüllt; immer fehlte es aber noch an einem Lehrbuche, in welchem alle Hauptprobleme der sphärischen Astronomie behandelt wurden und woraus namentlich Diejenigen, welche sich einem gründlichen Studium dieser Wissenschaft widmen wollen, die verschiedenen Methoden kennen lernten, deren man sich jetzt bedient, um die oft schwierige Lösung der verschiedenen Probleme in einer eleganten und für die Anwendung bequemen Weise möglich zu machen. Der Verfasser hofft durch die Herausgabe des vorliegenden Lehrbuchs diesem Bedürfnisse einigermaafsen entsprochen zu haben. Man wird in demselben keines der Hauptprobleme der sphärischen Astronomie vermissen und durch das Studium desselben die Mittel finden, auch solche Aufgaben, welche grade nicht in demselben behandelt sind, mit Leichtigkeit selbst aufzulösen. Da das Buch hauptsächlich für den Selbstunterricht bestimmt ist, so hat sich der Verfasser bemüht, alle Probleme möglichst deutlich zn behandeln und nirgends eine Schwierigkeit übrig zu lassen; daher sind an einzelnen Stellen auch rein mathematische Entwickelungen eingeschaltet, die man in den gewöhnlichen mathematischen Lehrbüchern wenigstens nicht in der Weise, als es grade hier nöthig war, vorfindet. Aus demselben Grunde wurde in der Einleitung eine Ableitung der sphärischtrigonometrischen Formeln und der Interpolationsformeln gegeben; weil später grade auf diese am häufigsten hingewiesen werden mufste. Sehr gern wäre hier auch eine

Darstellung der Methode der kleinsten Quadrate aufgenommen worden, um auf diese Weise in der Einleitung alles beisammen zu haben, was später häufiger Anwendung findet, wenn nicht dadurch die Einleitung selbst über Gebühr verlängert worden wäre. Der Verfasser hat sich darauf beschränken müssen, diese Methode da wo dieselbe Anwendung findet, kurz zu erwähnen.

Im Ganzen ist in der Darstellung eine synthetische Methode befolgt und der Stoff möglichst systematisch geordnet worden, theils um so wenig als möglich im Vortrage einer Materie auf später Vorkommendes hinweisen zu müssen, theils um für den Lernenden das Aufsuchen der einzelnen Probleme in dem Buche zu erleichtern. Der Verfasser hofft, dafs die hiernach gewählte Aufeinanderfolge der einzelnen Materien nicht unpassend sein wird. Etwas abweichend von früheren Darstellungen hat sich der Verfasser bei der Aufstellung der Grundgleichungen der Probleme nicht wie gewöhnlich der Formeln der sphärischen Trigonometrie, sondern fast durchgängig der Transformation der Coordinaten bedient, um der lästigen Betrachtung einzelner Fälle je nach den verschiedenen Werthen, welche die Winkel eines Dreiecks in verschiedenen Lagen haben können, überhoben zu sein. Für Diejenigen, bei welchen diese Art der Darstellung weniger Beifall finden dürfte, ist indessen fast immer auf die Herleitung der Formeln aus den sphärischen Dreiecken hingewiesen, überdies auch in der Einleitung der Zusammenhang zwischen den sphärisch-trigonometrischen Formeln und den Formeln für die Transformation der Coordinaten gegeben worden.

THE ASTRONOMICAL JOURNAL No. 41. v. 4. Juni 1852 urtheilt von diesem Werke:

„The want of a proper text-book to be placed in the hands of students of Astronomy has become a reproach to the science. Dr. BRÜNNOW, lately Director of the Observatory at Bilk, and now attached to that of Berlin, has endeavoured to remove this reproach, by the preparation of the „Lehrbuch der Sphärischen Astronomie", in which all the chief problems of this branch of our science are treated in a masterly manner. Those who are acquainted with the author through his essays in the last volumes of the „Astronomische Nachrichten", can appreciate his qualifications for such a work as this. He has availed himself freely of the labours of the great masters, particularly Gauss and Bessel, and the student will find here, collected in one volume, all the formulas and methods now in every-day use among practical astronomers for the computation of precession, nutation, aberration, parallax, for the determination of geographical positions, for the adjustment and use of instruments, etc.

It is earnestly to be hoped that this valuable work may be translated into the English tongue, and all true astronomers will share the earnest wish, if not the confidence, expressed by ENCKE in his preface to the work: „I shall regard it as a most favourable indication of the scientific tendency in our country, if, beside the numerous popular works on astronomy, this book, demanding as it does a more earnest interest in the science, shall meet with such a reception as may encourage the author cheerfully to continue upon the path on which he has entered."

BERLINER

ASTRONOMISCHES JAHRBUCH

für 1855.

Mit Genehmhaltung der Königlichen Academie der Wissenschaften

herausgegeben

von

J. F. Encke.

Director der Berliner Sternwarte,

unter Mitwirkung des Herrn Dr. Wolfers.

1852. gr. 8. 3 Thlr.

ACADEMISCHE STERNKARTEN

nebst

dem dazugehörigen

Verzeichnifs der von Bradley, Piazzi, Lalande und Bessel beobachteten Sterne,

berechnet und auf 1800 reducirt.

Auf Veranlassung

der

Königlichen Academie der Wissenschaften zu Berlin.

Im Laufe dieses Jahres erschienen:

Hora XI. von Boguslawsky in Breslau.

- XX. von Postsecretair Hencke in Driesen.

Über die

ABWEICHUNG DER GESCHOSSE

nebst einem Anhange:

Über eine auffallende Erscheinung bei rotirenden Körpern

von

G. Magnus.

Gelesen in der Königlichen Academie der Wissenschaften am 7. August 1851 und 17. Juni 1852.

1852. gr. 4. geh. 12 Sgr.

ÜBER

DAS PROBLEM DER ROTATION

EINES FESTEN KÖRPERS,

auf welchen beliebige Kräfte wirken.

Von

Dr. Friedrich Julius Richelot,

ord. Professor der Mathematik an der Königsberger Universität, correspondirendem Mitgliede der Berliner Academie der Wissenschaften.

Vorgelesen in der Berliner Academie am 26. Februar 1851.

gr. 4. geh. 24 Sgr.

Der Herr Verfasser führt in dieser Abhandlung das Problem der Rotation eines festen Körpers zuerst auf die Jacobi'sche partielle Differentialgleichung zurück und giebt das Integral desselben für den Fall, dafs keine äufsern Kräfte auf den Körper wirken. Er entwickelt hieraus dasjenige System von Elementen, welches den Formeln des sogenannten gestörten Problems die einfachste Gestalt giebt, und weist ihren Zusammenhang mit dem von Poisson gebrauchten Systeme von Constanten nach.

VERZEICHNISS

VON

WERKEN

AUS DEM GEBIETE DER

ASTRONOMIE UND MATHEMATIK

ERSCHIENEN

IN

Ferd. Dümmler's Verlagsbuchhandlung

IN BERLIN.

Gratis durch alle Buchhandlungen zu erhalten.



